МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Томск
Издательство Томского государственного университета
2022

УДК 532.54:532.135:536.252:519.6
ББК 22.253
Б82

Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р.
Б82 Течения неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 210 с.

ISBN 978-5-907572-33-1

В книге излагаются основы численного моделирования изотермических и неизотермических течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью, заключающиеся в формулировке математических моделей и разработке методов расчета течений жидкости при заполнении плоских и осесимметричных каналов, приводятся результаты исследований кинематических, динамических и тепловых характеристик потоков.

Описывается разностный метод решения задач о течении ньютоновской и неньютоновской жидкостей со свободной поверхностью с учетом вязкой диссипации, зависимости реологических характеристик от температуры и капиллярных эффектов на поверхности раздела. Предлагаются методы устранения сингулярностей в математической постановке задач, связанных с условиями на линии трехфазного контакта газ-жидкость-твердое тело и реологическими моделями вязкопластичных сред.

Для научных и инженерно-технических работников в области переработки жидких сред методом литья, аспирантов и студентов высших учебных заведений соответствующих специальностей.

УДК 532.54:532.135:536.252:519.6
ББК 22.253

Рецензенты:
Г.В. Пышнограй, доктор физико-математических наук, профессор;
О.В. Матвиенко, доктор физико-математических наук, профессор

Исследования авторов выполнены за счет средств Российского научного фонда (проекты № 18-19-00021, № 18-19-00021-П)

ISBN 978-5-907572-33-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Широко распространенным способом переработки текучих сред в производстве изделий из полимерных композиций, керамик и металлов, в пищевой промышленности, в порошковой металлургии и т. п. является метод литья под давлением. На определенном этапе формования изделий из полимерных композиций этим методом осуществляется заполнение емкостей различной геометрии жидкой средой. Микроструктура формуемого образца, его теплофизические и механические свойства существенно зависят от термомеханической истории процесса заполнения. В общем случае течение наполненных полимерных композиций при заполнении емкостей характеризуется неньютоновским поведением, неизотермичностью, химическим превращением, наличием свободной поверхности. Неньютоновость полимерных материалов в текучем состоянии может оказывать существенное влияние на характеристики течения в процессе переработки. Реология полимерных композиций в зависимости от условий переработки может меняться от ньютоновской до проявления свойств нелинейно-вязких и вязкоупругих жидкостей. Фундаментальные результаты, полученные под руководством Г.В. Виноградова, А.Я. Малкина, Г.М. Бартенева, З.П. Шульмана и др., позволили сформулировать параметрические зависимости, описывающие реологическое поведение наполненных полимерных композиций при их деформировании, которые могут быть использованы в математических постановках соответствующих задач [1, 2]. Высокоэнергетические наполненные полимерные композиции относятся к структурированным материалам, характерной особенностью которых является наличие предела текучести [3, 4]. Предел текучести – одна из основных характеристик вязкопластичных жидкостей, которая до сих пор является предметом дискуссии в реологии. Тем не менее предел текучести, несомненно, полезное понятие с точки зрения моделирования течений структурируемых жидкостей.

Неизотермичность процесса заполнения емкостей текучими средами обусловливается вязкой диссипацией в потоке, возможностью химического превращения с выделением или поглощением тепла, условиями теплообмена на границах области. Интенсивность вязкой диссипации в какой-либо точке потока определяется значениями эффективной вязкости среды и составляющих тензора скоростей деформаций. В случае зависимости реологических параметров от температуры соответствующее ее изменение приводит к изменению вязкости и, следовательно, влияет на распределения кинематических и динамических характеристик течения. С другой стороны, поскольку технологический процесс изготовления изделий из высокоэнергетических наполненных полимерных композиций (твердые ракетные топлива) является пожаровзрывоопасным, температура материала должна соответствовать значениям, обеспечивающим безопасный режим переработки. Критические значения температуры определяются характеристиками воспламенения композиции.

За последние десятилетия выполнено большое количество исследований заполнения емкостей в плоской и осесимметричной постановках в приближении ньютоновского и неньютоновского поведения жидкости отечественными исследователями под руководством А.М. Липанова, М.Ю. Альеса, И.К. Березина, В.К. Булгакова, И.М. Васенина, К.А. Чехонина, Г.Р. Шрагера, В.А. Якутенка и ряда зарубежных – H. Mavridis, D.J. Coyle, C.W. Macosco, E. Mitsoulis, M.R. Kamal. Однако в этих работах представлены неполные сведения о кинематике течений и эволюции свободной поверхности в зависимости от значений реологических параметров.

Существуют эффективные численные методы расчета течений жидкости со свободной поверхностью, такие как VOF-метод, MAC-метод, метод функции уровня, метод конечных элементов, ALE-метод, метод граничных элементов. Современные вычислительные технологии реализуют математические постановки задач, в основе которых лежат математические модели, позволяющие более точно предсказывать эволюцию свободной поверхности и детали рассматриваемого течения. Численное моделирование нестационарных течений жидкости со свободной поверхностью усложняется необходимостью определения области решения и динамики линии трехфазного контакта газ – жидкость – твердое тело (ЛТК). Анализу алгоритмов расчета эволюции свободной поверхности, используемых в перечисленных методах, и проблеме динамики ЛТК также посвящено заметное количество публикаций, среди которых можно выделить работы Ю.Д. Шихмурзаева, О.В. Воинова, T.D. Blake, W. Ren.

Учет неньютоновского поведения жидкости требует значительных усилий для успешной реализации вычислительных технологий. С одной стороны, возникновение дополнительных нелинейных членов в основных уравнениях и граничных условиях, изменение величины эффективной вязкости в области решения существенно влияют на условия и скорость сходимости вычислительных алгоритмов. С другой стороны, в задачах о течении вязкопластичной среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей квазитвердых ядер. Это обстоятельство создает большие трудности при построении эффективных численных методов. Основная сложность при численном моделировании течения вязкопластической среды связана с сингулярностью реологических соотношений и невозможностью вычислить напряжения в тех областях, где скорость деформации равна нулю. Для решения этой проблемы широко используются методы регуляризации.

Однако, несмотря на постоянное внимание к проблеме и многочисленные практические приложения ее решений, до сих пор отсутствуют критериальные зависимости структуры потоков и их кинематических и динамических характеристик для неизотермического заполнения емкостей реологически сложными средами с учетом свободной поверхности, устранением сингулярности на линии контакта с использованием существующих эмпирических законов формирования динамического краевого угла.

Целью настоящей монографии является моделирование течений неньютоновских жидкостей при наличии свободной поверхности с учетом вязкой диссипации и зависимости реологических параметров от температуры для прогнозирования эффективности технологических процессов переработки жидких сред методом литья.

Результаты, представленные в монографии, получены с помощью различных численных методик, как традиционно применяемых в вычислительной гидродинамике, так и оригинальных, разработанных и реализованных авторами книги.

Монография состоит из введения, 5 глав и списка литературы.

В первой главе описаны гидродинамические процессы, реализующиеся в технологии переработки полимерных жидкостей методом литья. Сформулирована общая математическая постановка задачи о неизотермическом течении неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. Представлены дифференциальные уравнения, описывающие движение и теплообмен сплошной среды; реологические уравнения состояния, связывающие тензор напряжений с тензором скоростей деформации с учетом зависимости реологических параметров от температуры; граничные условия. Проведен литературный обзор численных методов расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Во второй главе приведено описание вычислительной технологии, используемой в работе. Методика решения поставленной задачи основана на методе контрольного объема для расчета полей искомых характеристик в области течения и методе инвариантов для реализации граничных условий на свободной поверхности. Дифференциальные уравнения движения и энергии дискретизируются на разнесенной сетке неявным образом. Полученная система алгебраических уравнений разрешается с использованием итерационного метода Гаусса–Зейделя. Уравнение неразрывности удовлетворяется с помощью процедуры SIMPLE.

В третьей главе сформулирована математическая постановка задачи и проведено параметрическое исследование процесса заполнения вертикального плоского канала / вертикальной круглой трубы неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести в изотермических условиях.

В четвертой главе представлены результаты заполнения плоского канала вязкопластичной жидкостью с учетом зависимости реологических параметров от температуры и вязкой диссипации механической энергии.

В пятой главе представлены результаты исследования процесса заполнения осесимметричного канала вязкой жидкостью в изотермических условиях в поле силы тяжести с учетом сил поверхностного натяжения.

Результаты, представленные в монографии, частично опубликованы в [5–27].

Авторы выражают благодарность доценту О.Ю. Фролову за участие в проведении расчетов и сотрудникам кафедры прикладной газовой динамики и горения за помощь по оформлению и подготовке работы к публикации.

Настоящая монография содержит результаты исследований по проектам Российского научного фонда № 18-19-00021, № 18-19-00021-П, выполненных в 2018–2022 гг. коллективом сотрудников из Национального исследовательского Томского государственного университета.

ГЛАВА 1. Моделирование течений жидкости со свободной поверхностью

В данной главе описаны гидродинамические процессы, реализующиеся в технологии переработки полимерных жидкостей методом литья. Сформулирована общая математическая постановка задачи о неизотермическом течении неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. Записаны дифференциальные уравнения, описывающие движение и теплообмен сплошной среды; реологические уравнения состояния, связывающие тензор напряжений с тензором скоростей деформации с учетом зависимости реологических параметров от температуры; граничные условия. Проведен литературный обзор численных методов расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью.

1.1. Гидродинамические процессы в технологии переработки полимерных жидкостей методом литья

В настоящее время литье под давлением является одной из наиболее универсальных технологий изготовления изделий из полимерных материалов различной формы и размеров, которая также используется для производства изделий на основе композитов, пен, резины, термореактивных и термопластичных материалов, металлов и керамик.

В общем случае технология литья под давлением представляет собой циклический процесс с тремя стадиями [28–30]:

1. Стадия заполнения: расплав полимера подается под высоким давлением в пресс-форму и заполняет ее.

2. Стадия усадки: после заполнения формы поддерживается высокое давление и в форму подается дополнительный расплав для компенсации усадки в процессе охлаждения.

3. Стадия охлаждения: расплав полимера охлаждается, сформованное изделие извлекается из формы.

В течение этих стадий свойства полимерной композиции, конструкция пресс-формы и условия формования определяют термомеханическую историю изготовления, которая, в свою очередь, определяет физические свойства готового изделия. Понимание влияния условий производства на свойства изделия является ключевым для качественного, безопасного и бездефектного производства.

Стадия заполнения является наиболее сложным и важным этапом и привлекает большое внимание исследователей. Во-первых, по мере заполнения пресс-формы в формуемом изделии могут возникать различного рода дефекты: газовые включения или линии спая. Характерной особенностью рассматриваемых течений является наличие движущейся вдоль твердой стенки линии трехфазного контакта (ЛТК) жидкость – газ – твердое тело. В общем, и эволюция свободной поверхности и свойства расплава влияют на процесс образования дефектов. Во-вторых, доминирующим фактором, влияющим на механические свойства продукта, является ориентация молекул. Полимерные макромолекулы стремятся подстроиться под действующее поле напряжений, сохраняя ориентацию после прекращения течения или затвердевания. Это может привести к анизотропии физических свойств готового изделия.

Наиболее общая математическая модель объединяет:

– конструкцию пресс-формы и условия формования;

– реологические и физические свойства расплава полимера;

– уравнения сохранения массы, количества движения и энергии;

– теорию молекулярной ориентации.

Такая модель может давать полную картину процесса формования изделия, реализуемого в технологии литья под давлением. Результаты исследования модели можно условно разделить на две группы: крупномасштабные параметры, которые дают минимальное количество необходимой информации для обеспечения производства (время заполнения, необходимый уровень давления, температуры охлаждения и т.п.), и мелкомасштабные параметры, включающие распределение основных характеристик (скорость, температура, давление, эволюция свободной поверхности), а также положение возможных дефектов (линии спая и газовые включения) [31].

Таким образом, чтобы количественно проанализировать поведение полимерного материала при его переработке на этапе формования, необходимо сформулировать математическую постановку задачи, описывающую процесс, а затем решить ее тем или иным способом. Процесс моделирования включает в себя запись дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса и энергии, которым должна подчиняться система, а также уравнений состояния, описывающих свойства перерабатываемого материала. Полученная система должна решаться с учетом определенных граничных условий, которые обычно описывают такие факторы, как геометрия системы и силы или деформация на границе. Как правило, такие математические формулировки слишком сложны, чтобы использовать простые аналитические методы решения, и требуют численных решений.

Использование аппарата физического моделирования во многих случаях может быть затруднено в силу дороговизны, пожаровзрывоопасности наполненной полимерной композиции или сложности экспериментальной установки. Эксперимент целесообразно применять для проверки критериальных зависимостей, полученных в ходе математического моделирования.

1.2. Математическая постановка

Течение неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью в неизотермических условиях описывается уравнениями движения, энергии и неразрывности:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\left(2\eta\mathbf{E}\right)+\mathbf{X},$$

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla T\right)=\lambda\Delta T+Q, \qquad (1.1)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0.$$

Жидкость считается несжимаемой, коэффициенты теплопроводности λ и теплоемкости c – постоянными величинами. Здесь ρ – плотность жидкости, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, t – время, p – давление, η – эффективная (кажущаяся) вязкость, $\mathbf{E}$ – тензор скоростей деформаций, $\mathbf{X}$ – вектор массовых сил, T – температура, Q – диссипативная функция, характеризующая энергию, теряемую на вязкое трение.

Система уравнений (1.1) замыкается реологическим законом, который описывает связь тензора напряжений и тензора скоростей деформации. В случае если они связаны линейным соотношением, то такие жидкости называются ньютоновскими. В противном случае – неньютоновскими или реологически сложными.

На твердых неподвижных стенках выполняются условия прилипания, т.е. нормальная и касательная компоненты вектора скорости равны нулю, за исключением малой окрестности вблизи линии трехфазного контакта.

На свободной поверхности динамические граничные условия заключаются в отсутствии касательных напряжений и равенстве нормального напряжения сумме внешнего и капиллярного давлений

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{n}=-p_0+\sigma K,$$
$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{n}=0. \qquad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{\Pi}$ – тензор напряжений, K – сумма главных кривизн поверхности, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ – нормальный и касательный единичные векторы к свободной границе. Кроме того, движение свободной поверхности подчиняется кинематическим условиям

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точек свободной поверхности.

Течения жидкостей со свободной поверхностью характеризуются наличием движущейся вдоль твердой стенки линии трехфазного контакта. Анализ традиционной математической постановки задачи с использованием уравнений Навье – Стокса и неразрывности, условия прилипания на стенки, естественных граничных условий на свободной поверхности, значений динамического краевого угла, отличного от 0 и π, показывает наличие сингулярности в определении динамических характеристик течений, приводящих к бесконечному росту их значений по мере приближения к линии контакта [32, 33]. В связи с этим в постановках задач используются различные модели динамики линии контакта, устраняющие указанное противоречие.

1.3. Математическое моделирование течений ньютоновской жидкости со свободной поверхностью

1.3.1. Численные методы расчета динамики свободной поверхности

Свободная поверхность является фазовой границей между жидкостью и находящимся над ней газом. В случае течения жидкости со свободной границей возникает проблема, связанная с определением области течения, которая меняется во времени. Проблемы подобного класса встречаются во многих технологических приложениях, в которых движущаяся свободная граница играет доминирующую роль. Качественное и количественное описание свободной поверхности зависит от понимания физических процессов, происходящих на ней.

Наличие границы раздела фаз с учетом поверхностного натяжения определяется динамическими (1.2) и кинематическими (1.3) условиями, которые могут быть дополнены граничными условиями для переноса тепла. Особого внимания требует моделирование динамики контактной линии. На сегодняшний день нет четкого понимания физики процесса взаимодействия фаз в окрестности трехфазного контакта.

Задачи со свободной поверхностью возникают в инженерных приложениях и в природе и имеют различные особенности, которые обусловливают применение специальных вычислительных технологий. За последние сорок лет было разработано большое количество методов [34–36]. Тем не менее учет различных особенностей течений жидкостей со свободными границами требует разработки новых или модернизации существующих вычислительных технологий. Современные методы стремятся точнее описать границу раздела фаз, учесть поверхностное натяжение или другие физические эффекты.

В общем случае все методы расчета динамики жидкости со свободной поверхностью можно разделить на Эйлеровы, Лагранжевы или смешанные Эйлерово-Лагранжевы. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки. Выбор метода зависит от конкретной решаемой задачи. Лагранжевы методы предпочтительнее использовать, когда деформации свободной поверхности не слишком велики. Смешанные Эйлерово-Лагранжевы методы применяются при решении задач, в которых область течения жидкости изменяется умеренно или в задачах взаимодействия жидкости с различными структурами. В общем случае Эйлеровы методы являются наиболее распространенными, поскольку они позволяют учитывать произвольные изменения формы свободной границы.

1.3.2. Эйлеровы методы

Эйлеровы методы характеризуются системой координат, которая либо стационарна в данной системе отсчета, либо движется определенным образом. Жидкость перемещается между различными вычислительными ячейками, даже когда сетка движется, при этом движение сетки никак не связано с движением жидкости. Преимуществом такого подхода является то, что граница жидкости может испытывать сколь угодно большие искажения без потери точности, в отличие от Лагранжевых методов.

Можно отметить некоторые особенности математических постановок и численных алгоритмов их реализации, связанные с решением конкретных задач:

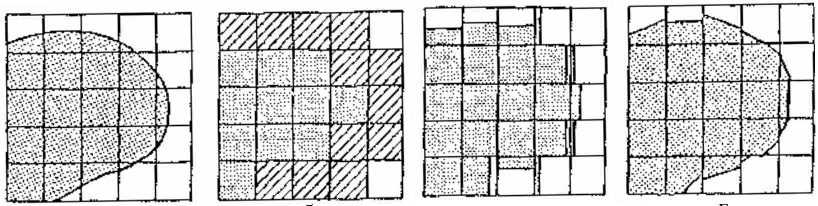
– использование естественных переменных скорость–давление или вихрь-функция тока для описания потока жидкости;

– алгоритм дискретизации дифференциальных уравнений сохранения: конечные разности, конечные элементы и т.п.;

– вопросы, связанные с движением свободной поверхности на дискретном уровне.

В вычислительной гидродинамике существует терминология относительно способа представления свободной поверхности на дискретном уровне: с явным (interface tracking) и неявным (interface capture) выделением границы. Эйлеровы методы используют второй способ, который заключается в следующем. В методах с неявным выделением границы вводится специальная функция, определяющая наличие жидкости в окрестности точки, а граница раздела находится вблизи максимума градиента этой функции. Методы с явным выделением границы дискретизируют поверхность тем или иным способом, который определяет точно ее местоположение.

Методы неявного выделения границы не хранят информацию о местоположении и ориентации поверхности, они восстанавливают данные о ней, где это необходимо. Процедура восстановления использует информацию о количестве жидкости или маркерах в рассматриваемой вычислительной ячейке. Граница представляет собой набор разрывных сегментов. Этот метод хорошо подходит для моделирования гладких границ, но менее эффективен при моделировании границ с резкими изменениями формы. Характерный размер сетки на границе раздела совпадает с размером внутренней сетки. В методе MAC (Marker And Cell) [37] маркерные частицы используются для идентификации пространственной области, занятой жидкостью со свободной поверхностью. Положение поверхности определяется с точностью до вычислительной ячейки, содержащей маркеры и имеющей смежную пустую ячейку (рис. 1.1, *б*). К недостаткам этого метода можно отнести следующее: он не дает какую-либо информацию о точном положении, ориентации или кривизне поверхности; не выполняются естественные граничные условия на свободной поверхности.



а б в г

Рис. 1.1. Восстановление свободной поверхности [35]:
а – точная форма поверхности; *б* – восстановление на основе MAC (поверхность находится где-то внутри заштрихованной области); *в* – восстановление на основе VOF-метода; *г* – восстановление на основе VOF-PLIC-метода

Другой класс алгоритмов восстановления поверхности использует дробную функцию F, определяемую как доля объема вычислительной ячейки, занятой жидкостью. Если функция равна единице, то выбранная ячейка полностью заполнена жидкостью; если она равна нулю, то ячейка пустая. Поверхность проходит через ячейки, в которых значения дробной функции находятся в интервале от нуля до единицы. Значение F на новом временном шаге определяется полем скорости и вычисляется согласно уравнению переноса

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \cdot \nabla F = 0.$$

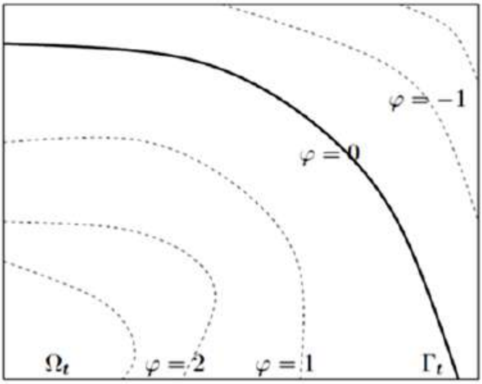


Рис. 1.2. Представление поверхности в методе набора уровней [34]

При численном решении этого уравнения с помощью стандартных разностных схем возникает проблема, связанная с «размазыванием» функции F и как следствие границы раздела. VOF (Volume Of Fluid) методы восстанавливают поверхность, используя распределение функции F. В оригинальной работе [38] свободная поверхность представляется в виде набора отрезков, проходящих через поверхностные ячейки. При этом они ориентируются либо горизонтально, либо вертикально (см. рис. 1.1, *в*). В PLIC-VOF-методе [39] отрезки расположены под углом в соответствии с нормальным направлением (рис. 1.1, *г*), которое определяется как направление наибольшего изменения функции F. Значения этой функции с течением времени находятся из уравнения переноса, которое дискретизируется на разностной сетке, а величины потоков через грани вычисляются исходя из геометрических соображений и рассчитанных значений скорости на гранях контрольного объёма. Преимущество данного метода заключается в высокой точности выполнения закона сохранения массы на дискретном уровне. К недостаткам можно отнести проблемы точности вычисления нормального направления и кривизны поверхности.

Похожая идея лежит в основе метода функции уровня (level set method), который был предложен в [40]. Вводится некая скалярная функция φ, которая определяет свободную границу как ее изоповерхность с нулевым значением (рис. 1.2). Положительные значения φ соответствуют жидкой фазе, отрицательные – газовой. Уравнение переноса функции φ имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_n \left| \nabla \varphi \right| = 0,$$

где u_n – нормальная скорость на изолинии φ.

1.3.3. Лагранжевы методы

Лагранжевы методы характеризуются системой координат, которая движется вместе с жидкостью, т.е. скорость узлов вычислительной сетки совпадает со скоростью жидкости. Каждая вычислительная ячейка содержит один и тот же объем жидкости, а свободная поверхность совпадает с ее гранями. Можно выделить следующие преимущества такого подхода: граничные условия на свободной поверхности реализуются достаточно просто; сложные структуры потока могут быть учтены при построении разностной сетки. Основные недостатки метода связаны с «запутыванием» сетки и ее высокой нерегулярностью, что приводит к большим вычислительным ошибкам.

Для случаев течения жидкости, когда деформации свободной поверхности ограничены, используются прямые методы без дополнительных перестроений сетки с течением времени (рис. 1.3). В пионерской работе [41] подобный подход используется для решения задач о колебаниях жидкости в емкости и формирования мениска с учетом сил поверхностного натяжения. Численный алгоритм получил название LINC (Lagrangian Incompressible), а система уравнений дискретизировалась с использованием метода конечного объема на четырехугольной сетке. Аналогичный подход используется для решения задачи о заполнении плоских и осесимметричных каналов в работах [42, 43]. Математическая постановка записана с учетом неньютоновского поведения среды. Начальная форма поверхности представляет собой полукруг. Используются триангулированые расчетные сетки.

Другой вариант Лагранжева метода был предложен в [45]. В основе решения лежит метод контрольного объема, реализованный на треугольной сетке. Однако узлы не связаны друг с другом в течение всего времени расчета и могут быть удалены или добавлены, при этом контрольные объемы могут быть образованы разными наборами узлов в зависимости от используемого критерия. Последний может быть основан на характерном значении длины грани или угла контрольного объема и т.п. В работе [46] решается задача динамики вязкой и идеальной жидкостей со свободными границами с помощью метода естественных соседей, который использует аналогичную идею о перестроении сетки на каждом временном слое.

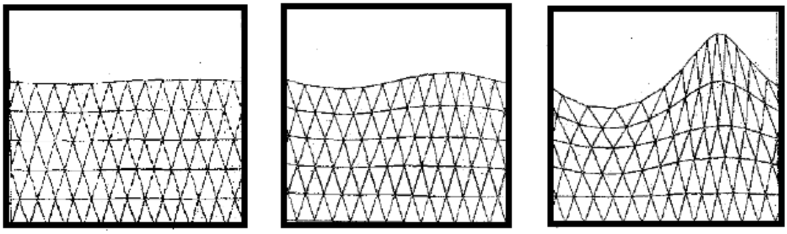


Рис. 1.3. Деформация треугольной сетки в задаче распростанения волны [44]

В отдельный класс можно выделить так называемые методы частиц. Они являются бессеточными в смысле отслеживания фронта границы раздела. Первоначальная идея заключается в том, что жидкость можно моделировать конечным набором взаимодействующих частиц. Каждая частица характеризуется координатами, массой, скоростью, энергией и т.п. Этот подход впервые был применен в работе [47], а метод известен под названием PAF (particle and force). Метод SPH (smoothed particle hydrodynamics) изначально разрабатывался для решения астрофизических задач, но впоследствии был адаптирован для решения задач о течениях жидкости со свободной поверхностью [48–50]. Данный алгоритм позволяет проводить расчеты с достаточно сложными формами границы раздела фаз. Однако требуются значительные вычислительные мощности по сравнению с другими методами, так как для обеспечения репрезентативности рассматриваемого объема жидкости необходимо использовать большое количество частиц.

В основе метода граничных элементов (МГЭ) лежит интегральная связь между искомыми переменными на границе области и внутри нее, которая получена из фундаментального решения [51]. Эта связь позволяет построить систему граничных интегральных уравнений, в которую входят неизвестные только на границе области [52]. Первоначально МГЭ применялся в механике твердого тела в рамках линейной теории деформации. В механике жидкости использование метода возможно при существенных упрощениях. Например, потенциальные течения идеальной жидкости [53] и медленные течения в приближения Стокса [54]. В [53, 54] свободная поверхность разбивается на конечное число отрезков малой длины, в пределах которых искомые функции считаются постоянной величиной и рассчитываются из интегральных соотношений. Движение свободной поверхности осуществляется в соответствии с кинематическим условием.

1.3.4. Смешанные Лагранжево-Эйлеровы методы

В смешанных методах применяются для описания течений жидкости как Лагранжев подход так и Эйлеров, сочетая преимущества одного и избегая недостатков другого.

Применение метода LINC ограничено случаями малых деформаций свободной поверхности, обеспечивающих регулярность вычислительной сетки. Однако в случаях, когда сетка становится «запутанной», можно строить новую и задавать значения искомых переменных в узлах с использованием старой сетки. Перестроение может иметь место либо на каждом шаге по времени, либо через определенный интервал. Реализация непрерывного перестроения описана в работе [55], а метод назван ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian). Недостатками такого подхода являются достаточно большие затраты процессорного времени на перестроение и потеря точности при интерполяции значений в узлы новой сетки. В [56, 57] представлен библиографический обзор подобных методов, применяемых для анализа и моделирования процессов переработки полимеров.

Другой подход объединения заключается в использовании двух сеток: эйлеровой для расчета полей искомых переменных и лагранжевой для определения местоположения свободной поверхности. В случае явного выделения границы раздела для плоских задач поверхность задается упорядоченным набором точек-маркеров, расположенных на ней. Между этими точками ее положение аппроксимируется интерполяционным полиномом (рис. 1.4). В пространственном случае поверхность задается набором маркеров, кривых и поверхностей [58]. На каждом временном шаге необходимо знать информацию о положении маркерных частиц и последовательность, в которой они соединены. При необходимости кривизну поверхности можно вычислить, используя эти данные. Движение маркеров осуществляется согласно кинематическому условию. Преимуществом описанного метода является его способность разрешать геометрические особенности поверхности, которые меньше шага внутренней эйлеровой сетки, на которой расположены маркеры. В качестве недостатков метода можно выделить следующие проблемы. Во-первых, очень сложно обрабатывать сливание поверхностей. Это требует переупорядочивания маркерных точек и как результат приводит к сложному логическому программированию. Во-вторых, с течением времени маркерные частицы могут перераспределяться вдоль свободной поверхности, образуя области с высокой или низкой плотностью маркеров. Как следствие, для точного представления границы раздела необходимо организовать процедуру перераспределения маркеров.

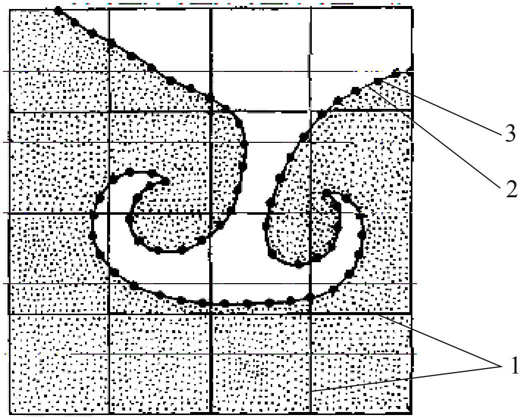


Рис. 1.4. Дискретизация свободной поверхности с помощью маркеров [36]:
1 – внутренняя эйлеровская сетка; *2* – свободная поверхность; *3* – частица-маркер

Первой реализацией можно считать метод частиц в ячейках PIC (particle in cell) [59]. Идея метода состоит в том, чтобы построить в области регулярную эйлерову сетку для вычисления полей давления и скорости жидкости, а для определения границы раздела фаз в подобласть, занятой жидкостью, распределить маркерные частицы (рис. 1.5).

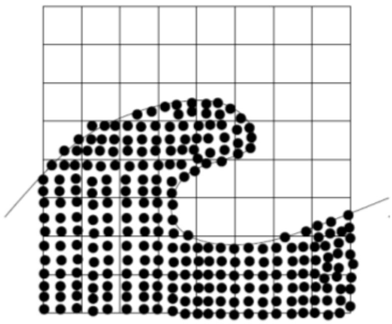


Рис. 1.5. Распределение маркерных частиц относительно
эйлеровой расчетной сетки в области течения жидкости [34]

Метод, предложенный в [58, 60], основан на записи одной системы уравнений для всей вычислительной области и рассматривает различные фазы как одну жидкость с переменными свойствами по пространству. Межфазные эффекты учитываются путем добавления соответствующих источников в виде δ-функций на границе фаз. Полученная система решается методом конечных объемов на фиксированной эйлеровой сетке, а фронт поверхности явно отслеживается связанными точками маркера.

Численную методику расчета течений вязкой жидкости со свободной поверхностью, описанную в настоящей работе, можно отнести к этой же группе. Составляющие вектора скорости и давления во внутренней области рассчитываются на фиксированной эйлеровой разнесенной сетке, а свободная поверхность представляется в виде набора подвижных частиц маркеров.

ГЛАВА 2. Метод расчета

Математические постановки задач о неизотермических течениях неньютоновских сред настолько сложны, что аналитическое решение удается получить лишь в исключительных случаях. В общем случае эффективным инструментом исследования рассматриваемых течений является численное моделирование. Процесс решения условно можно разделить на следующие этапы: дискретизация области решения, дискретизация дифференциальных уравнений, реализация на ЭВМ алгоритма решения системы алгебраических уравнений. Необходимым элементом моделирования является верификация программного комплекса: проверка аппроксимационной сходимости разработанного алгоритма решения, сравнение результатов расчетов с известными аналитическими решениями или с численными и экспериментальными данными других авторов.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменение во времени искомых переменных (количество движения, температура), представляют собой уравнения переноса с учетом конвективного и диффузионного механизмов. В связи с этим удобно рассмотреть вывод разностных аналогов для обобщенной переменной с последующей конкретизацией для уравнений сохранения количества движения и энергии.

Дискретизация дифференциальных уравнений проводится с использованием метода контрольного объема, суть которого заключается в интегрировании уравнений сохранения по контрольному объему. Область решения разбивается на малые объемы, изменение искомой функции внутри них происходит за счет переноса через поверхность (потоки) и генерации внутри (источники). Так как поток, входящий в рассматриваемый объем, равен потоку, покидающему сопряженный объем, метод контрольных объемов является консервативным. Расчет поля давления выполняется с помощью алгоритма SIMPLE [61], который дополнительно обеспечивает выполнение разностного аналога уравнения неразрывности.

2.1. Расчет полей скорости и давления

2.1.1. Дискретизация уравнения переноса обобщенной переменной Ф

Изменение обобщенной переменной Ф под действием конвективных и диффузионных сил описывается уравнением переноса, которое в декартовой (α=0) или цилиндрической (α=1) системах координат в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\mathrm{K}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+v\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)+\alpha\frac{\Gamma}{x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+S. \quad (2.1)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{1}{x_1^{\alpha}}\frac{\partial x_1^{\alpha}u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}=0. \quad (2.2)$$

Здесь u, v – проекции вектора скорости на оси системы координат x_1, x_2, t – время, Γ – коэффициент переноса, S – источниковый член, K – безразмерный критерий, характеризующий соотношение конвективного и диффузионного потоков. Используя уравнение неразрывности, уравнение переноса (2.1) можно записать в консервативной форме

$$\mathrm{K}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{x_1^{\alpha}}\frac{\partial x_1^{\alpha}u\Phi}{\partial x_1}+\frac{\partial v\Phi}{\partial x_2}\right)=\frac{1}{x_1^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x_1^{\alpha}\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+S.$$

Введем понятие суммарных потоков J^1, J^2 и перепишем уравнение переноса следующим образом:

$$\mathrm{K}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{x_1^{\alpha}}\frac{\partial x_1^{\alpha}J^1}{\partial x_1}+\frac{\partial J^2}{\partial x_2}=S, \quad (2.3)$$

где

$$J^1=\mathrm{K}u\Phi-\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\quad J^2=\mathrm{K}v\Phi-\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}. \quad (2.4)$$

На рис. 2.1 представлены фрагмент расчетной сетки и контрольный объем для узла P. Прописными буквами обозначены узлы сетки, строчными – грани контрольного объема.

Предполагая постоянство потоков вдоль граней, проинтегрируем уравнение (2.3) по контрольному объему

$$\mathrm{K}\int_w^e\int_s^n\frac{\partial\Phi}{\partial t}x_1^{\alpha}dx_1dx_2+\left(\left(x_1^{\alpha}J^1\right)_e-\left(x_1^{\alpha}J^1\right)_w\right)h+\left(x_1^{\alpha}\right)_P\left(J_n^2-J_s^2\right)h=\int_w^e\int_s^n S\,x_1^{\alpha}dx_1dx_2.$$

Интегрирование нестационарного и источникового слагаемых выполняется в предположении постоянства значений подынтегральных функций по всей площади контрольного объема

$$\mathrm{K}\frac{\Phi_P-\Phi_P^0}{\Delta t}\left(x_1^{\alpha}\right)_P h^2+\left(\left(x_1^{\alpha}J^1\right)_e-\left(x_1^{\alpha}J^1\right)_w\right)h+\left(x_1^{\alpha}\right)_P\left(J_n^2-J_s^2\right)h=\left(Sx_1^{\alpha}\right)_P h^2,$$

где Φ_P^0 – значение функции на предыдущем слое по времени. Введем обозначение $x = x_1^\alpha$. Разделив последнее уравнение на x_P, получим

$$\mathrm{K}\frac{\Phi_P - \Phi_P^0}{\Delta t}h^2 + \left(\frac{x_e}{x_P}J_e^1 - \frac{x_w}{x_P}J_w^1\right)h + \left(J_n^2 - J_s^2\right)h = S_P h^2. \qquad (2.5)$$

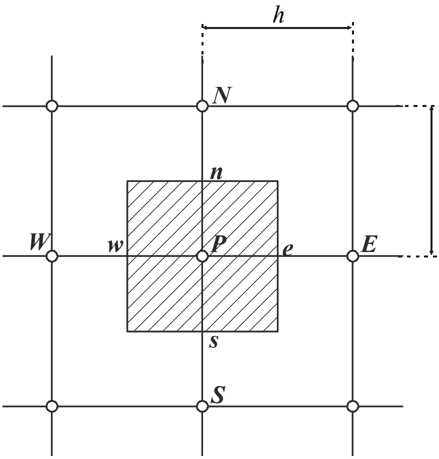


Рис. 2.1. Шаблон сетки

Аналогичным образом проинтегрируем по контрольному объему уравнение неразрывности (2.2)

$$\left(\frac{x_e}{x_P}u_e - \frac{x_w}{x_P}u_w\right)h + \left(v_n - v_s\right)h = 0. \qquad (2.6)$$

Для получения окончательного представления разностных аналогов уравнения переноса обобщенной переменной Φ необходимо записать значение суммарных потоков через грани контрольного объема.

2.1.2. Экспоненциальная схема

Вычисление потоков на гранях в плоском случае можно произвести с использованием точного решения следующей задачи. Рассмотрим стационарную задачу переноса обобщенной переменной Φ в несжимаемой жидкости в одномерном случае, когда реализуются конвективный и диффузионный механизмы переноса. Уравнения переноса и неразрывности в безразмерных переменных примут вид

$$\mathrm{K}\frac{du\Phi}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\Gamma\frac{d\Phi}{dx}\right),\ \ \frac{du}{dx}=0, \tag{2.7}$$

где u – скорость в направлении оси x, Γ – коэффициент переноса, K – безразмерный критерий. Систему (2.7) дополним следующими граничными условиями:

$$\Phi=\Phi_P,\ x=x_P;\ \ \Phi=\Phi_E,\ x=x_E;\ \ x_E>x_P. \tag{2.8}$$

Решение уравнения неразрывности показывает, что в области реализуется однородный профиль скорости, т.е. u=const на рассматриваемом интервале. Тогда, предполагая постоянство Γ на рассматриваемом интервале, решение первого уравнения системы (2.7) можно получить аналитически

$$\Phi(x)=\Phi_P+\frac{\Phi_E-\Phi_P}{e^R-1}\left(e^{R\frac{x-x_P}{x_E-x_P}}-1\right)=\Phi_P+\frac{\Phi_E-\Phi_P}{e^R-1}\left(e^{R\frac{x-x_P}{h}}-1\right),$$

$$R=\frac{\mathrm{K}u}{\Gamma}\left(x_E-x_P\right)=\frac{\mathrm{K}uh}{\Gamma}. \tag{2.9}$$

Запишем значение суммарного потока на грани контрольного объема с использованием точного решения (2.9)

$$J_e^1=\mathrm{K}u_e\left(\frac{e^{R_e}\Phi_P-\Phi_E}{e^{R_e}-1}\right)=\frac{\Gamma_e}{h}\left(\frac{R_e e^{\mathrm{R}_e}\Phi_P-R_e\Phi_E}{e^{R_e}-1}\right).$$

Здесь $R_e=\mathrm{K}u_e h/\Gamma_e$ – значение R, вычисленное в точке x_e. Аналогичным образом записываются потоки на других гранях. С учетом полученных формул перепишем разностный аналог уравнения переноса обобщенной переменной (2.5) для случая α=0

$$\mathrm{K}\frac{\Phi_P-\Phi_P^0}{\Delta t}h^2+\left(\frac{\Gamma_e}{h}\left(\frac{R_e e^{\mathrm{R}_e}\Phi_P-R_e\Phi_E}{e^{R_e}-1}\right)-\frac{\Gamma_w}{h}\left(\frac{R_w e^{\mathrm{R}_w}\Phi_W-R_e\Phi_P}{e^{\mathrm{R}_w}-1}\right)\right)h+$$

$$+\left(\frac{\Gamma_n}{h}\left(\frac{\mathrm{R}_n e^{R_n}\Phi_P-R_n\Phi_N}{e^{R_n}-1}\right)-\frac{\Gamma_s}{h}\left(\frac{R_s e^{\bar{R}_s}\Phi_S-R_s\Phi_P}{e^{R_s}-1}\right)\right)h=S_P h^2.$$

После математических преобразований последнее уравнение примет вид

$$\Phi_P\left(\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+\Gamma_e\frac{R_e e^{R_e}}{e^{R_e}-1}+\Gamma_w\frac{R_e}{e^{R_w}-1}+\Gamma_n\frac{R_n e^{R_n}}{e^{\mathrm{R}_n}-1}+\Gamma_s\frac{R_s}{e^{R_s}-1}\right)=\Gamma_e\frac{R_e}{e^{R_e}-1}\Phi_E+$$

$$+\Gamma_w\frac{R_w e^{R_w}}{e^{R_w}-1}\Phi_W+\Gamma_n\frac{R_n}{e^{R_n}-1}\Phi_N+\Gamma_s\frac{R_s e^{R_s}}{e^{R_s}-1}\Phi_S+\Phi_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P h^2.$$

Введем обозначения

$$A(R)=\frac{R}{e^R-1},\ B(R)=\frac{Re^R}{e^R-1}.$$

Для функций A и B справедливы следующие свойства:

$$B(R)=A(-R),\ B(R)-A(R)=R.$$

Уравнение переноса в разностном виде можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+\Gamma_e A(R_e)+\Gamma_w A(-R_w)+\Gamma_n A(R_n)+\Gamma_s A(-R_s)+\right.$$

$$\left.+\Gamma_e R_e-\Gamma_w R_w+\Gamma_n R_n-\Gamma_s R_s\right)\Phi_P=$$

$$=\Gamma_e A(R_e)\Phi_E+\Gamma_w A(-R_w)\Phi_W+\Gamma_n A(R_n)\Phi_N+\Gamma_s A(-R_s)\Phi_S+$$

$$+\ \Phi_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P h^2.$$

Преобразуем последние четыре слагаемых коэффициента в левой части

$$\Gamma_e R_e-\Gamma_w R_w+\Gamma_n R_n-\Gamma_s R_s=$$

$$=\Gamma_e\frac{\mathrm{K}u_e h}{\Gamma_e}-\Gamma_w\frac{\mathrm{K}u_w h}{\Gamma_w}+\Gamma_n\frac{\mathrm{K}v_n h}{\Gamma_n}-\Gamma_s\frac{\mathrm{K}v_s h}{\Gamma_s}= \tag{2.10}$$

$$=\mathrm{K}\left[(u_e-u_w)h+(v_n-v_s)h\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть разностный аналог уравнения неразрывности для плоского случая (α=0) и, согласно (2.6), равно нулю. Таким образом, получаем окончательный вид разностного аналога уравнения (2.1) с использованием экспоненциальной схемы

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W+a_N\Phi_N+a_S\Phi_S+\Phi_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P h^2,$$

$$a_E=\Gamma_e A(R_e),\ a_W=\Gamma_w A(-\mathrm{R}_w),\ a_N=\Gamma_n A(R_n),\ a_S=\Gamma_s A(-R_s),$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S+\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}.$$

2.1.3. Схема против потока

Рассмотрим дискретизацию суммарного потока с использованием схемы против потока для конвективного слагаемого и схемы центральных разностей для диффузионного

$$J_e = \mathrm{K}u_e\left\{\Phi\right\}_e - \Gamma_e\frac{\Phi_E - \Phi_P}{h},$$

где

$$\left\{\Phi\right\}_e = \begin{cases}\Phi_P,\, u_e \ge 0,\\ \Phi_E,\, u_e < 0.\end{cases}$$

Используя функцию $\left[\left|a,b\right|\right]$, которая равна максимальному значению a или b, поток J_e можно представить в виде

$$J_e = \mathrm{K}\left(\Phi_P\left[\left|u_e,0\right|\right] - \Phi_E\left[\left|-u_e,0\right|\right]\right) - \Gamma_e\frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Gamma_e\left(\left[\left|R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_P - \Gamma_e\left(\left[\left|-R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_E\right).$$

Запишем разностный аналог (2.5) с использованием предложенной дискретизации потока

$$\mathrm{K}\frac{\Phi_P - \Phi_P^0}{\Delta t}h^2 + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_P - \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|-R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_E -$$

$$-\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|R_w,0\right|\right]+1\right)\Phi_W + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|-R_w,0\right|\right]+1\right)\Phi_P +$$

$$+\Gamma_n\left(\left[\left|R_n,0\right|\right]+1\right)\Phi_P - \Gamma_n\left(\left[\left|-R_n,0\right|\right]+1\right)\Phi_N -$$

$$-\Gamma_s\left(\left[\left|R_s,0\right|\right]+1\right)\Phi_S + \Gamma_s\left(\left[\left|-R_s,0\right|\right]+1\right)\Phi_P = S_P h^2.$$

В последнем уравнении выполним ряд математических преобразований

$$\left(\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|R_e,0\right|\right]+1\right) + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|-R_w,0\right|\right]+1\right) +\right.$$

$$\left.+\Gamma_n\left(\left[\left|R_n,0\right|\right]+1\right) + \Gamma_s\left(\left[\left|-R_s,0\right|\right]+1\right)\right)\Phi_P =$$

$$= \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|-R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_E + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|R_w,0\right|\right]+1\right)\Phi_W +$$

$$\Gamma_n\left(\left[\left|-R_n,0\right|\right]+1\right)\Phi_N + \Gamma_s\left(\left[\left|R_s,0\right|\right]+1\right)\Phi_S + \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}\Phi_P^0 + S_P h^2.$$

Для функции $\left[\left|R,0\right|\right]$ справедливо следующее свойство:

$$\left[\left|R,0\right|\right]=\left[\left|-R,0\right|\right]+R.$$

Тогда уравнение переноса в разностном виде можно записать следующим образом:

$$\left\{\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|-R_e,0\right|\right]+1\right)+\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|R_w,0\right|\right]+1\right)+\Gamma_n\left(\left[\left|-R_n,0\right|\right]+1\right)+\right.$$

$$\left.+\Gamma_s\left(\left[\left|R_s,0\right|\right]+1\right)+\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e R_e-\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w R_w+\Gamma_n R_n-\Gamma_s R_s\right\}\Phi_P=$$

$$=\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\left(\left[\left|-R_e,0\right|\right]+1\right)\Phi_E+\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\left(\left[\left|R_w,0\right|\right]+1\right)\Phi_W+\Gamma_n\left(\left[\left|-R_n,0\right|\right]+1\right)\Phi_N+$$

$$+\Gamma_s\left(\left[\left|R_s,0\right|\right]+1\right)\Phi_S+\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}\Phi_P^0+S_P h^2.$$

Преобразуем сумму последних четырех слагаемых в коэффициенте, стоящем перед Φ_P, следующим образом:

$$\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e R_e-\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w R_w+\Gamma_n R_n-\Gamma_s R_s=\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e\frac{\mathrm{K}u_e h}{\Gamma_e}-\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w\frac{\mathrm{K}u_w h}{\Gamma_w}+$$

$$+\Gamma_n\frac{\mathrm{K}v_n h}{\Gamma_n}-\Gamma_s\frac{\mathrm{K}v_s h}{\Gamma_s}=\mathrm{K}\left[\left(\frac{x_e}{x_P}u_e-\frac{x_w}{x_P}u_w\right)h+\left(v_n-v_s\right)h\right].$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю согласно (2.6). Таким образом, получаем окончательный вид разностного аналога уравнения (2.1) с использованием схемы против потока для дискретизации конвективных слагаемых

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W+a_N\Phi_N+a_S\Phi_S+\Phi_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P h^2.$$

$$a_E=\frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A(R_e),\ a_W=\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A(-R_e),\ a_N=\Gamma_n A(R_n),\ a_S=\Gamma_s A(-R_s),$$

$$a_P=a_E+a_W+a_N+a_S+\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t},$$

где $A(R)=\left[\left|-R,0\right|\right]+1$.

2.1.4. Линейная схема

Аппроксимируем значение обобщенной переменной Ф линейной функцией между узлами E и P. Тогда суммарный поток запишется следующим образом:

$$J_e = \mathrm{K}u_e \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2} - \Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{h} = \frac{\Gamma_e}{h}\left(-0,5R_e + 1\right)\Phi_E + \frac{\Gamma_e}{h}\left(0,5R_e + 1\right)\Phi_P.$$

Введем обозначение $A(R) = -0,5R + 1$ и запишем разностный аналог (2.5) с использованием предложенной дискретизации потока

$$\mathrm{K}\frac{\Phi_P - \Phi_P^0}{\Delta t}h^2 + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(-R_e\right)\Phi_P - \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(R_e\right)\Phi_E -$$

$$-\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(R_w\right)\Phi_W + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(-R_w\right)\Phi_P +$$

$$+\Gamma_n A\left(-R_n\right)\Phi_P - \Gamma_n A\left(R_n\right)\Phi_N - \Gamma_s A\left(R_s\right)\Phi_S + \Gamma_s A\left(R_s\right)\Phi_P = S_P h^2.$$

Выполним математические преобразования:

$$\left(\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(-R_e\right) + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(R_w\right) + \Gamma_n A\left(-R_n\right) + \Gamma_s A\left(R_s\right)\right)\Phi_P =$$

$$= \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(R_e\right)\Phi_E + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(-R_w\right)\Phi_W + \Gamma_n A\left(R_n\right)\Phi_N +$$

$$+\Gamma_s A\left(-R_s\right)\Phi_S + \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}\Phi_P^0 + S_P h^2.$$

Для функции $A(R)$ справедливо следующее свойство:

$$A\left(R\right) = A(-R) - R.$$

Тогда уравнение переноса в разностном виде можно записать следующим образом:

$$\left\{\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(R_e\right) + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(-R_w\right) + \Gamma_n A\left(R_n\right) + \Gamma_s A\left(-R_s\right) + \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e R_e -\right.$$

$$\left. -\frac{x_w}{x_P}\Gamma_w R_w + \Gamma_n R_n - \Gamma_s\, R_s\right\}\Phi_P = \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A\left(R_e\right)\Phi_E + \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A\left(-R_w\right)\Phi_W +$$

$$+\Gamma_n A\left(R_n\right)\Phi_N + \Gamma_s A\left(-R_n\right)\Phi_S + \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}\Phi_P^0 + S_P h^2.$$

В предыдущем пункте показано, что сумма последних четырех слагаемых в коэффициенте, стоящем перед Φ_P, равна нулю. Таким образом, получаем окончательный вид разностного аналога уравнения (2.1) с использованием линейной схемы

$$a_P\Phi_P = a_E\Phi_E + a_W\Phi_W + a_N\Phi_N + a_S\Phi_S + \Phi_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + S_P h^2,$$

$$a_E = \frac{x_e}{x_P}\Gamma_e A(R_e),\; a_W = \frac{x_w}{x_P}\Gamma_w A(-R_e),\; a_N = \Gamma_n A(R_n),\; a_S = \Gamma_s A(-R_s),$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}.$$

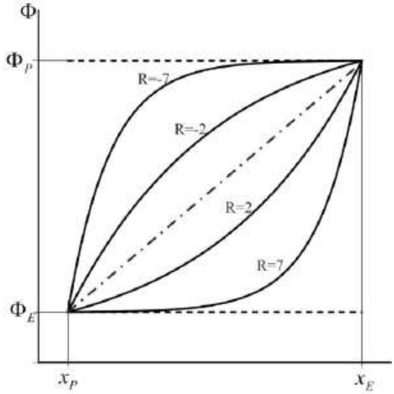


Рис. 2.2. Представление функции Φ между узлами

На рис. 2.2 представлены профили обобщенной переменной Φ между узлами сетки E и P. Сплошные линии соответствуют точному решению (2.9), пунктирные – используются в схеме против потока, штрихпунктирная – используется в линейной схеме. Видно, что при малых значениях параметра R профиль точного решения стремится к профилю, используемому в линейной схеме, а при больших R – к противопоточной схеме.

2.1.5. Дискретизация области

Область решения дискретизируется с помощью разнесенной разностной сетки [37], которая строится следующим образом. Область разбивается на квадратные контрольные объемы, в центре которых расположены узлы для расчета давления. Узлы для расчета составляющей скорости u лежат на гранях, перпендикулярных оси x_1, а v – на гранях, перпендикулярных оси x_2. На рис. 2.3 представлен фрагмент разнесенной сетки.

Кружки соответствуют узлам давления p, крестики – узлам компоненты вектора скорости u, треугольники – узлам компоненты вектора скорости v. Контрольные объемы для составляющих скорости изображены на рис. 2.4.

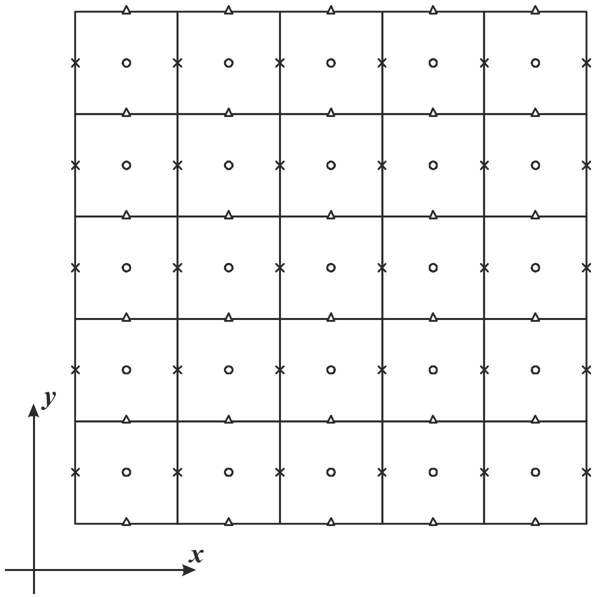


Рис. 2.3. Фрагмент разнесенной сетки

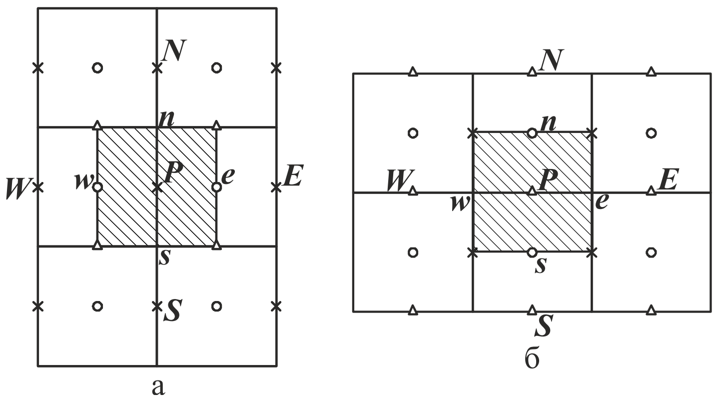


Рис. 2.4. Контрольные объемы для составляющих вектора скорости u (*а*) и v (*б*)

2.1.6. Дискретизация уравнения движения и неразрывности

Система уравнений движения и неразрывности в случае течения неньютоновской жидкости имеет вид

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x_1}+v\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{1}{x_1^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\alpha\eta\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+S^1,$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x_1}+v\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{1}{x_1^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\alpha\eta\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+S^2,$$

$$\frac{1}{x_1^\alpha}\frac{\partial\left(x_1^\alpha u\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}=0,$$

где

$$S^1=\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\alpha\eta\frac{u}{x_1^2},$$

$$S^2=\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Используя подход, описанный в предыдущих параграфах, взяв в качестве обобщенной переменной компоненты вектора скорости, разностные аналоги уравнений движения записываем в виде

$$\begin{aligned}a_Pu_P&=a_Eu_E+a_Wu_W+a_Nu_N+a_Su_S-\left(p_e-p_w\right)h+u_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P^1h^2,\\ a_Pv_P&=a_Ev_E+a_Wv_W+a_Nv_N+a_Sv_S-\left(p_n-p_s\right)h+v_P^0\frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t}+S_P^2h^2.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Коэффициенты a_P, a_E, a_W, … вычисляются с использованием экспоненциальной схемы в плоском случае и линейной – в осесимметричном. Значение источниковых слагаемых рассчитывается в центрах соответствующих контрольных объемов с использованием схемы центральных разностей, при этом считается, что это значение постоянно внутри рассматриваемого контрольного объема.

2.1.7. Расчет поля давления. Алгоритм SIMPLE

Поле скорости, вычисленное по формулам (2.11), удовлетворяет разностным аналогам уравнения неразрывности в случае, когда используется поле давления, удовлетворяющее исходной системе уравнений. Если в расчетах используется приближенное поле давления p^*, то вычисленное поле скорости u^*, v^* не будет удовлетворять уравнению неразрывности, но будет удовлетворять разностным аналогам уравнения движения

$$a_P u_P^* = a_E u_E^* + a_W u_W^* + a_N u_N^* + a_S u_S^* - \left(p_e^* - p_w^*\right)h + u_P^0 \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + S_P^1 h^2, \quad (2.12)$$

$$a_P v_P^* = a_E v_E^* + a_W v_W^* + a_N v_N^* + a_S v_S^* - \left(p_n^* - p_s^*\right)h + v_P^0 \frac{\mathrm{K}h^2}{\Delta t} + S_P^2 h^2. \quad (2.13)$$

Предположим, что истинное давление находится по формуле

$$p = p^* + p', \quad (2.14)$$

где p' – поправка давления. Аналогично вводятся поправки составляющих скорости

$$u = u^* + u', v = v^* + v'.$$

Вычитая (2.12) из (2.11), получим следующее соотношение:

$$a_P u_P' = a_E u_E' + a_W u_W' + a_N u_N' + a_S u_S' - \left(p_e' - p_w'\right)h.$$

Используемый алгоритм расчета предполагает организацию на каждом шаге по времени итерационного процесса, обеспечивающего сходимость искомых характеристик потока. Первыми четырьмя слагаемыми в правой части можно пренебречь, так как в ходе итерационного процесса вычисленное поле скорости будет удовлетворять разностным аналогам уравнений неразрывности и движения, и поправки обнулятся. В результате получается формула для поправки скорости u

$$u_P' = -\frac{h}{a_P}\left(p_e' - p_w'\right).$$

Индексы расставлены согласно шаблону, приведенному на рис. 2.4, *а*. Аналогичным образом выводится формула для поправки скорости v (рис. 2.4, *б*)

$$v_P' = -\frac{h}{a_P}\left(p_n' - p_s'\right).$$

Рассмотрим контрольный объем для узла давления P (рис. 2.5).

Поправочные значения скорости на гранях имеют вид

$$\begin{gathered} u_e = u_e^* - \frac{h}{a_e}\left(p_E' - p_P'\right), \; u_w = u_w^* - \frac{h}{a_w}\left(p_P' - p_W'\right), \\ v_n = v_n^* - \frac{h}{a_n}\left(p_N' - p_P'\right), \; v_s = v_s^* - \frac{h}{a_s}\left(p_P' - p_S'\right). \end{gathered} \quad (2.15)$$

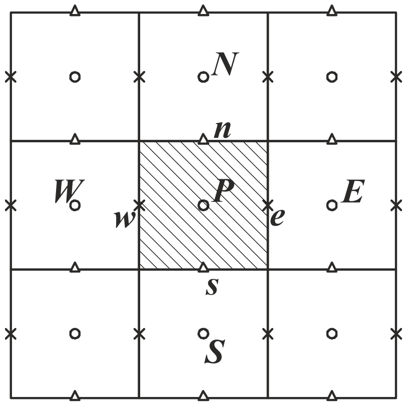


Рис. 2.5. Контрольный объем узла давления P

Проинтегрируем уравнение неразрывности по контрольному объему в предположении постоянства скоростей вдоль граней и с учетом обозначения $x = x_1^{\alpha}$

$$\left(\frac{x_e}{x_P}u_e - \frac{x_w}{x_P}u_w\right)h + \left(v_n - v_s\right)h = 0.$$

Подставив выражения (2.15) в последнее уравнение и проведя группировку слагаемых, получим выражения для расчета поправки давления в узле P

$$\begin{gathered} b_P p'_P = b_E p'_E + b_W p'_W + b_N p'_N + b_S p'_S - \left(\frac{x_e}{x_P}u_e^* - \frac{x_w}{x_P}u_w^* - v_n^* + v_s^*\right), \\ b_E = \frac{x_e}{x_P}\frac{h}{a_e},\ b_W = \frac{x_w}{x_P}\frac{h}{a_W},\ b_N = \frac{h}{a_n},\ b_S = \frac{h}{a_s},\ b_P = b_E + b_W + b_N + b_S. \end{gathered} \tag{2.16}$$

В случае, если какая-то из граней совпадает с границей, на которой задается скорость, то поправка скорости на этой гране равна нулю и как следствие, обнуляется соответствующий коэффициент b. Записав последнее уравнение в каждом расчетном узле сетки, получим систему линейных алгебраических уравнений, которая решается с использованием итерационного метода Гаусса–Зейделя [62].

Таким образом, алгоритм расчета составляющих вектора скорости и давления с течением времени заключается в следующем:

1. Задание начальных условий u^0, v^0.
2. Задание начального приближения поля давления p^*.

3. Расчет поля скорости по формулам (2.12), (2.13).
4. Расчет поправок давления по формуле (2.16).
5. Корректировка полей скорости и давления с помощью (2.15) и (2.14).
6. Проверка сходимости полей скорости и давления на текущем временном шаге. Если сходимость не достигнута, то скорректированное распределение давления задается в качестве начального приближения p^*, и алгоритм возвращается к пункту 3.
7. Переход на новый временной шаг и возвращение к пункту 2.

2.2. Расчет поля температуры

Поле температуры рассчитывается из разностных аналогов уравнения теплопроводности. Расчетные узлы расположены в центре контрольных объемов и совпадают с узлами давления, а дискретизация выполняется аналогично дискретизации уравнения движения, но с привлечением схемы против потока.

Узлы для расчета диссипативной функции и эффективной вязкости расположены в центре контрольных объемов. При их расчете производные компоненты вектора скорости по координатам дискретизируются центральными разностями.

2.3. Численная реализация граничных условий на свободной поверхности

В технологии переработки полимерных материалов широко реализуются течения, характерной особенностью которых является наличие свободной поверхности, т.е. границы раздела между жидкостью и находящимся над ней газом. В этих случаях при математическом моделировании возникает ряд трудностей. В данном разделе приводится описание методики реализации естественных граничных условий на свободной поверхности с использованием метода инвариантов [63]. Методика реализована с учетом меняющейся во времени области расчета.

2.3.1. Метод инвариантов

Рассмотрим произвольный объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью и твердыми стенками. Для каждой точки свободной границы вводится локальная декартова система координат (n, s, ξ). Ось n направлена по нормали к свободной поверхности, оси s, ξ – касательные к ней. При рассмотрении плоских течений координатные линии ξ являются прямыми линиями, перпендикулярными плоскости x_1Ox_2. Для осесимметричного случая линии ξ представляют собой окружности с центрами на оси x_2, лежащими в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Динамические граничные условия на свободной поверхности получаются из предположения непрерывности напряжений на ней и состоят в равенстве нулю касательных напряжений и нормальных – сумме капиллярного и внешнего давлений. Внешнее давление без ограничения общности можно считать равным нулю. Динамические условия в локальной декартовой системе координат запишутся в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial n}=0, \tag{2.17}$$

$$-p+2\mu\frac{\partial u_n}{\partial n}=\sigma K, \tag{2.18}$$

где u_s, u_n – проекции вектора скорости на соответствующие оси. Уравнение неразрывности в этой системе имеет вид

$$\frac{\partial u_s}{\partial s}+\frac{\partial u_n}{\partial n}+\alpha\frac{u}{x_1}=0. \tag{2.19}$$

Складывая и вычитая уравнения (2.17), (2.19) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial Q}{\partial n}+\frac{\partial Q}{\partial s}+\alpha\frac{u}{x_1}=0,\ \frac{\partial R}{\partial n}-\frac{\partial R}{\partial s}+\alpha\frac{u}{x_1}=0, \tag{2.20}$$

где $Q=u_n+u_s$, $R=u_n-u_s$.

Свободная поверхность представляется в виде набора маркеров, равномерно расположенных вдоль нее, которые являются расчетными узлами искомых переменных. При этом первый маркер расположен на линии симметрии, а N-й – на твердой стенке. Из каждого маркера опускается нормаль внутрь расчетной области, на которой на некотором расстоянии ∇n_k размещается расчетный узел. Величина ∇n_k выбирается достаточной для попадания узла в регулярную ячейку внутренней расчетной сетки. Фрагмент расчетной сетки представлен на рис. 2.6.

Запишем разностные аналоги уравнений (2.20) в виде

$$\frac{Q_k-\hat{Q}_k}{\nabla n_k}+\frac{Q_k-Q_{k-1}}{\nabla s_k}+\alpha\frac{u_k}{\left(x_1\right)_k}=0,\ k=2,3,\dots,N;$$

$$\frac{R_k-\hat{R}_k}{\nabla n_k}-\frac{R_{k+1}-R_k}{\Delta s_k}+\alpha\frac{u_k}{\left(x_1\right)_k}=0,\ k=1,\dots,N-1,$$

где $\hat{Q}_k$, $\hat{R}_k$ – значение функций Q, R во внутренних узлах, Δs_k, ∇s_k, ∇n_k – шаги сетки в касательном и нормальном направлениях к свободной поверхности. Значения $\hat{Q}_k$, $\hat{R}_k$ вычисляются линейной интерполяцией значений функций Q, R из ближайших узлов внутренней расчетной сетки.

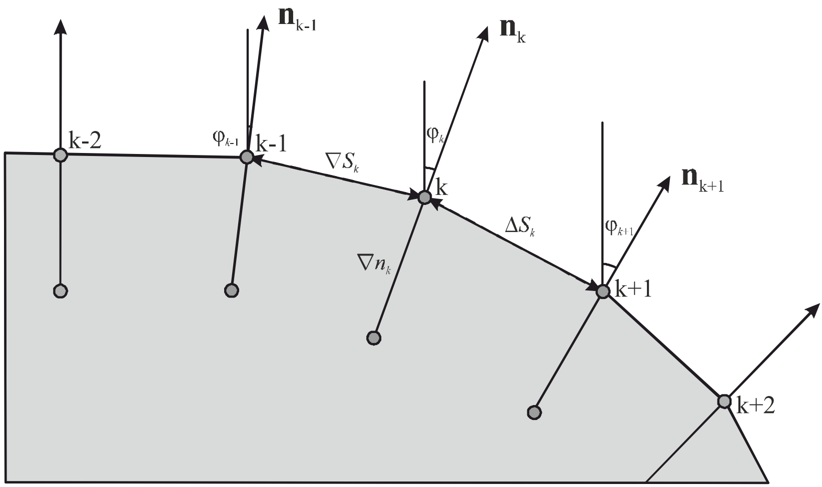


Рис. 2.6. Расчетная сетка на свободной поверхности

Из последней системы уравнений получаем расчетные формулы для вычисления Q_k, R_k:

$$Q_k = \frac{Q_{k-1}\nabla n_k + \hat{Q}_k \nabla s_k - \alpha \dfrac{u_k}{(x_1)_k} \nabla n_k \nabla s_k}{\nabla n_k + \nabla s_k},$$

$$R_k = \frac{R_{k+1}\nabla n_k + \hat{R}_k \Delta s_k - \alpha \dfrac{u_k}{(x_1)_k} \nabla n_k \Delta s_k}{\nabla n_k + \nabla s_k}. \qquad (2.21)$$

Поскольку уравнения (2.20) записаны в локальной декартовой системе координат, то значения Q_{k-1}, R_{k+1} в формулах (2.21) должны быть пересчитаны в системе координат, связанной с узлом k.

$$\bar{R}_{k+1} = R_{k+1}\cos\Delta\varphi_k - Q_{k+1}\sin\Delta\varphi_k,$$

$$\bar{Q}_{k-1} = Q_{k-1}\cos\nabla\varphi_k - R_{k-1}\sin\nabla\varphi_k,$$

где $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$, $\nabla\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, φ_k – угол поворота нормали, проведенной через k-й узел (см. рис. 2.6). Подставляя полученные выражения в (2.21), получаем

$$Q_k = \frac{\left(Q_{k-1}\cos\nabla\varphi_k - R_{k-1}\sin\nabla\varphi_k\right)\nabla n_k + \hat{Q}_k\nabla s_k - \alpha\dfrac{u_k}{\left(x_1\right)_k}\nabla n_k\nabla s_k}{\nabla n_k + \nabla s_k}, \quad (2.22)$$

$$R_k = \frac{\left(R_{k+1}\cos\Delta\varphi_k - Q_{k+1}\sin\Delta\varphi_k\right)\nabla n_k + \hat{R}_k\Delta s_k - \alpha\dfrac{u_k}{\left(x_1\right)_k}\nabla n_k\Delta s_k}{\nabla n_k + \nabla s_k}. \quad (2.23)$$

Значения давления в точках свободной поверхности находятся из условия (2.18), переписанного следующим образом:

$$p = 2\mu\frac{\partial u_n}{\partial n} - \sigma K,$$

или с использованием новых переменных

$$p = \mu\frac{\partial\left(R+Q\right)}{\partial n}.$$

Дискретизируя это уравнение на расчетной сетке свободной поверхности, получим формулу для расчета давления

$$p_k = 2\mu\frac{\left(R_k + Q_k\right) - \left(\hat{R}_k + \hat{Q}_k\right)}{\nabla n_k} - \sigma K_k, \quad (2.24)$$

где K_k – сумма главных кривизн формы свободной поверхности в точке k.

Таким образом, алгоритм реализации граничных условий на свободной поверхности сводится к следующей последовательности действий:

1. Задается начальное приближение Q, R.
2. В N-м расчётном узле, который лежит на стенке, задается значение R, исходя из граничных условий на линии трехфазного контакта.
3. Используя формулу (2.23), рассчитываются значения инварианта R_k вдоль границы в обратном направлении ($k = N–1, N–2, \ldots, 1$). При этом значения Q_{k+1} берутся с предыдущей итерации.
4. С помощью граничного условия симметрии задается значение Q в первом узле.
5. Используя формулу (2.22), рассчитываются значения инварианта Q вдоль границы в прямом направлении ($k = 2, 3, \ldots, N$). При этом значения $R_{k–1}$ берутся с предыдущей итерации.
6. Проверяется сходимость значений Q_k, R_k. В случае ее отсутствия алгоритм возвращается к пункту 2.

7. Выполняется расчет давления в маркерах согласно формуле (2.24).

Движение маркеров свободной границы описывается следующими кинематическими условиями:

$$\frac{dx_1}{dt} = u,\ \frac{dx_2}{dt} = v,$$

из разностных аналогов которых можно получить формулы

$$x_1\Big|_k^{l+1} = x_1\Big|_k^l + u_k \Delta t,\ x_2\Big|_k^{l+1} = x_2\Big|_k^l + v_k \Delta t.$$

Здесь нижний индекс соответствует номеру маркера, верхний – номеру шага по времени.

2.3.2. Особенности расчета на свободной поверхности

В процессе расчета свободная поверхность деформируется, а плотность маркеров на некоторых ее участках увеличивается или, наоборот, уменьшается. Для обеспечения точности расчетов необходимо производить перераспределение маркеров. В этой связи если расстояние между двумя соседними маркерами выходит за установленный интервал, выполняется процедура перераспределения маркеров с использованием сглаживающего кубического сплайна.

На дискретном уровне свободная поверхность представляется набором маркеров с координатами $x_1\big|_i, x_2\big|_i$ (i = 1, …, N). Введем обозначения $x_1\big|_i = x_i,\ x_2\big|_i = y_i$.

На каждом из промежутков $[x_i,\ x_{i+1}]$ сглаживающие сплайн-функции ищутся в виде многочлена третьей степени

$$S(x) = S_i(x) = z_i\left(1-t\right) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t\left(1-t\right)\left[(2-t)n_i + (1+t)n_{i+1}\right],$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = \left(x - x_i\right)/h.$ Можно показать, что функции $S(x),\ S'(x),\ S''(x)$ непрерывны на всем интервале $\left[x_1,\ x_N\right]$. Значения параметров z_i и n_i определяются из условия минимума функционала

$$J = \int\limits_{x_1|_1}^{x_1|_N} \left(S''(x)\right)^2 dx + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\rho_i}\left(z_i - x_2\big|_i\right)^2,$$

где $\rho_i > 0$ – заданные числа, которые определяют отклонение сплайна от узловых точек. На концах интервала задаются следующие граничные условия:

$$S'(x_1) = 0,\ S'(x_N) = y'_N.$$

Первое условие означает симметрию сплайна относительно нулевой точки. В результате математических преобразований [64] задача сводится к решению системы алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
a_1 n_1 + b_1 n_2 + c_1 n_3 = g_1, \\
b_1 n_1 + a_2 n_2 + b_2 n_3 + c_2 n_4 = g_2, \\
c_{i-2} n_{i-2} + b_{i-1} n_{i-1} + a_i n_i + b_i n_{i+1} + c_i n_{i+2} = g_i,\ i = 3, \ldots, N-2, \\
c_{N-3} n_{N-3} + b_{N-2} n_{N-2} + a_{N-1} n_{N-1} + b_{N-1} n_N = g_{N-1}, \\
c_{N-2} n_{N-2} + b_{N-1} n_{N-1} + a_N n_N = g_N,
\end{gathered}
\tag{2.25}
$$

где

$$a_1 = \frac{h_1}{3} + \frac{1}{h_1^2}(\rho_1 + \rho_2),$$

$$a_i = \frac{1}{3}\left(h_{i-1} + h_i\right) + \frac{1}{h_{i-1}^2}\rho_{i-1} + \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)^2 \rho_i + \frac{1}{h_i^2}\rho_{i+1},\ i = 2, \ldots, N-1,$$

$$a_N = \frac{h_{N-1}}{3} + \frac{1}{h_{N-1}^2}(\rho_{N-1} + \rho_N),$$

$$b_1 = \frac{h_1}{6} - \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\rho_2 - \frac{1}{h_1^2}\rho_1,$$

$$b_i = \frac{1}{6}h_i - \frac{1}{h_i}\left[\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\rho_i + \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\rho_{i+1}\right],\ i = 2, \ldots, N-2,$$

$$b_{N-1} = \frac{h_{N-1}}{6} + \frac{1}{h_{N-1}}\left(\frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_{N-2}}\right)\rho_{N-2} - \frac{1}{h_{N-1}^2}\rho_N,$$

$$c_1 = \frac{1}{h_1 h_2}\rho_2,$$

$$c_i = \frac{1}{h_i h_{i+1}}\rho_{i+1},\ i = 2, \ldots, N-3,$$

$$c_{N-1} = \frac{1}{h_{N-1} h_{N-2}}\rho_{N-1},$$

$$g_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$g_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}},\ i = 2, ..., N-1,$$

$$g_N = y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}}.$$

Матрица системы (2.25) невырожденная, поэтому система имеет единственное решение. Для ее решения можно использовать метод прогонки для пятидиагональной матрицы [65]. После того как определены n_i, z_i вычисляются согласно следующей формуле:

$$z_i = y_i - \rho_i D_i,\ i = 1, ..., N,$$

где

$$D_1 = \frac{1}{h_1}(n_2 - n_1),$$

$$D_i = \frac{1}{h_i}(n_{i+1} - n_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(n_i - n_{i-1}),\ i = 2, ..., N-1,$$

$$D_N = -\frac{1}{h_{N-1}}(n_N - n_{N-1}).$$

С помощью полученного интерполяционного сплайна рассчитываются координаты нового набора равномерно распределенных вдоль него маркеров.

2.4. Динамика линии трехфазного контакта

2.4.1. Существующие подходы устранения особенности

Линия трехфазного контакта газ-жидкость-твердое тело (ЛТК), движущаяся вдоль твердой стенки, является характерной особенностью течения сред со свободными границами [66–68]. К настоящему времени проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований течений жидких сред со свободной поверхностью и движущейся ЛТК. Достаточно полный обзор исследований, посвященных динамике ЛТК, можно найти в работах [69–73]. Тем не менее, несмотря на большое внимание к проблеме и многочисленные практические приложения ее решений, до сих пор нет полного понимания механизмов взаимодействия фаз на линии контакта и связанных с ними формирования фронта поверхности раздела, особенностей динамики контактной линии и течения жидкости в ее окрестности [74].

Как показано в [32, 33], традиционная математическая постановка задачи о течении жидкости со свободной поверхностью и условием прилипания содержит сингулярность в точках контактной линии. В качестве основного приближения для устранения особенности используется условие проскальзывания вдоль твердой стенки в малой окрестности линии контакта [75]. Обзор моделей скольжения для динамики контактной линии представлен в [76]. Описанные в [76] модели используют независимые предположения о динамическом краевом угле и устранении сингулярности на линии контакта. Обоснования моделей используют различные гипотезы о их физическом содержании. Например, механизмы скольжения обосновываются существованием предельного напряжения адгезии [77], формированием газового слоя на твердой стенке в результате захвата воздуха фронтом свободной поверхности [78–80], шероховатостью стенки [81], релаксационными свойствами поверхности раздела в окрестности линии контакта [82] и т.п.

Значительное влияние моделей динамики линий контакта на формирование фронта свободной поверхности и кинематические характеристики течения следует ожидать в случае, когда капиллярные эффекты доминируют либо соизмеримы с другими силами, действующими в потоке, в частности, над вязкими при малых значениях капиллярного числа $\mathrm{Ca} = \mu U / \sigma$, где μ – динамическая вязкость, U – характерная скорость, σ – коэффициент поверхностного натяжения. В пионерской работе [83] выполнен асимптотический анализ задачи движения контактной линии при заполнении капилляра для малых значений числа Ca. Решение включает значения динамического краевого угла и малый параметр, величина которого определяется масштабом выполнения гипотезы сплошности среды. Другие примеры асимптотического анализа отличаются в деталях. Например, в [84] используется более высокий порядок разложения по Ca и вводится дополнительный параметр, равный длине скольжения в окрестности ЛТК.

Математические постановки задач о течениях жидкости со свободными границами разрешимы с помощью аналитических методов лишь в частных случаях, поэтому большое распространение получили численные методы решения. Как следствие, особого внимания заслуживает разработка алгоритмов численной реализации моделей движения ЛТК и исследования их влияния на характеристики течения.

В настоящем разделе представлены результаты исследования влияния моделей динамики контактной линии и способов их численной реализации на эволюцию фронта свободной границы, распределения компонент вектора скорости и диссипативной функции течения, которые реализуются при заполнении вертикального плоского канала вязкой средой. Предполагается, что характер течения и режим взаимодействия фаз на контактной линии таковы, что динамический краевой угол близок к π, а капиллярные эффекты малы по сравнению с гравитационными, вязкими и инерционными силами в потоке. Предположение о близости значения динамического краевого угла к π используется в работах [32, 85, 86]. Экспериментальные исследования [87–91] подтверждают стремление значения краевого угла к π по мере уменьшения капиллярных эффектов. Аналогичные режимы течений реализуются в технологии формования изделий из полимерных материалов методом литья под давлением на стадии заполнения. В рамках этой технологии использование традиционной математической постановки без учета сил поверхностного натяжения является оправданным и не требует дополнительного рассмотрения модели динамики контактной линии. Течения расплавов полимеров со свободной границей характеризуются значениям $Ca >> 1$, поэтому допущение о пренебрежимой малости капиллярных эффектов широко распространено в этой области [33, 34], а его справедливость подтверждается расчетами, например, в [31].

2.4.2. Способы движения ЛТК

Как отмечалось ранее, рассматриваемая математическая постановка имеет сингулярность в определении динамических характеристик на линии трехфазного контакта в случае использования условия прилипания и значения краевого угла, отличного от 0 и π. С другой стороны, условие прилипания на линии трехфазного контакта при значениях динамического краевого угла, равного π, и движение линии вдоль твердой стенки не противоречат друг другу с точки зрения кинематики фронта потока. Картина течения предполагает катящееся движение фронта свободной поверхности по стенке подобно движению «тракторной гусеницы». Частицы жидкости, находящиеся на границе раздела газ–жидкость, «накатываются» на стенку, становясь точками контактной линии. Такой режим взаимодействия фаз на контактной линии наблюдается в экспериментах [69, 92]. В случае, если для выбранной пары жидкость–твердое тело поверхность является гидрофобной, т.е. слабо смачиваемой, а значение капиллярного числа Ca большое, то можно предположить, что краевой угол равен π [90]. Разработанный численный алгоритм движения ЛТК предполагает реализацию режима накатывания границы раздела фаз на твердую поверхность при заполнении канала с динамическим краевым углом, стремящимся к значению π. Таким образом, движение контактной линии осуществляется в соответствии с кинематическим условием на свободной поверхности. Другой способ вычисления движения контактной линии заключается в выполнении равенства динамического краевого угла π.

Наряду с использованием условия прилипания на ЛТК реализуется математическая постановка задачи, в которой на линии контакта задаются условие отсутствия касательного напряжения и условие непротекания, при этом касательная скорость определяется на твердой стенке в окрестности точки С по следующей формуле:

$$\nu(1, x_2) = V_C \left(\frac{\varepsilon}{V_C} \right)^{(x_2^{cl} - x_2)/l}, \quad x_2^{cl} - l \le x_2 \le x_2^{cl}, \tag{2.26}$$

где V_C – скорость контактной линии вдоль стенки, l – длина участка проскальзывания – макроскопический параметр согласования с потоком вне окрестности ЛТК, который удовлетворяет условию прилипания [93], ε – параметр модели, отвечающий за характер изменения скорости на участке скольжения, x_2^{cl} – продольная координата контактной линии. Таким образом, движение ЛТК осуществляется за счет двух механизмов: накатывания фронта потока на стенку и проскальзывания контактной линии вдоль нее. Последний рассмотренный способ кинематики ЛТК заключается в использовании механизмов проскальзывания и накатывания с выполнением условия равенства динамического краевого угла π.

Существует множество исследований, использующих условие проскальзывания. В рассматриваемой математической постановке задачи условие проскальзывания в окрестности ЛТК применяется для устранения математической особенности и организации сходящегося вычислительного алгоритма расчета. С другой стороны, условие проскальзывания можно трактовать как математическую модель течения в окрестности контактной линии, адекватную некоторой физической гипотезе.

2.4.3. Численная реализация алгоритмов движения ЛТК

Поставленная задача о заполнении плоского канала вязкой жидкостью в поле силы тяжести решается численно с использованием вычислительной методики, описанной в настоящей главе. В области течения строится разнесенная разностная сетка, а значения искомых переменных находятся с помощью метода контрольного объема и корректирующей процедуры SIMPLE [61]. Свободная поверхность на дискретном уровне представляется в виде набора упорядоченных лагранжевых частиц-маркеров, равномерно расположенных вдоль нее. Первый маркер расположен на линии симметрии, а последний – на контактной линии. Вычисление компонент вектора скорости проводится с помощью метода инвариантов [63], основанного на совместной записи уравнения неразрывности и условия отсутствия касательного напряжения с использованием новых переменных. Перемещение маркеров свободной границы во времени, за исключением последнего, осуществляется в соответствии с кинематическим условием (1.3).

В работе рассматриваются четыре способа расчета движения контактной линии:

1. На контактной линии задается условие прилипания, скорость маркера *C*, расположенного на ней, равна нулю. Маркер свободной поверхности *M* перемещается согласно кинематическому условию и в некий момент времени налетает на стенку. В результате маркер *C* перемещается в новое положение (рис. 2.7, *а*). Такой способ характеризуется дискретным характером движения контактной линии и формированием динамического краевого угла, близкого к π (способ 1).

2. На контактной линии задается условие прилипания и механизм накатывания осуществляется согласно равенству $\theta=\pi$. Движение ЛТК рассчитывается следующим образом. Прилегающий к линии участок поверхности *CM* аппроксимируется параболой таким образом, что стенка является касательной к ней в точке контакта *C*, где расположена вершина параболы (рис. 2.7, *б*). Перемещение контактной линии осуществляется за счет накатывания параболы на твердую границу подобно накатыванию «тракторной гусеницы» на дорогу, согласно следующим формулам:

$$x_2\big|_C^{n+1} = x_2\big|_C^{n} + V_{roll}\Delta t,$$
$$V_{roll} = \frac{\left(x_2\big|_M^{n} - x_2\big|_C^{n}\right)^2}{|\, x_2\big|_M^{n} - x_2\big|_C^{n}\,|}\frac{tg\varphi}{\cos\varphi}, \qquad (2.27)$$

где *Vroll* – скорость ЛТК за счет механизма накатывания, φ – угол поворота за один временной шаг отрезка *MC*, нижние индексы определяют положение маркеров, верхние индексы – временной шаг (способ 2).

3. Следующий способ движения заключается в задании скорости скольжения маркера *C* вдоль стенки согласно условию отсутствия касательного напряжения. В этом случае ЛТК перемещается за счет механизмов проскальзывания и накатывания маркеров свободной поверхности на стенку, движущихся согласно кинематическому условию (рис. 2.7, *в*).

В окрестности контактной линии вдоль стенки выделяется участок, на котором касательная скорость определяется формулой (2.26) (способ 3).

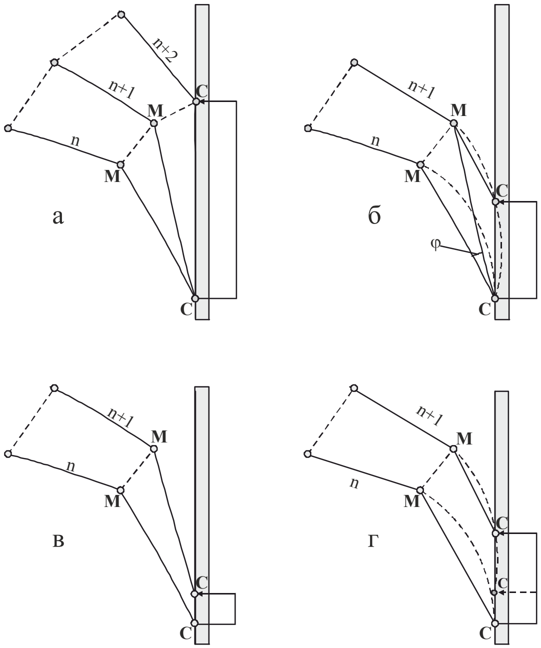


Рис. 2.7. Иллюстрация способов расчета

4. Последний способ расчета движения ЛТК заключается в следующем. Механизм накатывания по способу 2 реализуется одновременно с механизмом скольжения маркера *C* вдоль стенки по способу 3 (рис. 2.7, *г*). В результате на первом этапе маркер *C* перемещается за счет скольжения, а на втором осуществляется накатывание фронта потока на стенку с динамическим краевым углом, равным π (способ 4).

2.5. Общий порядок расчета

Алгоритм расчета неизотермических течений неньютоновской жидкости со свободной поверхностью иллюстрирует блок-схема на рис. 2.8.

Расчет содержит два итерационных цикла. Первый организован при расчете поправок давления. В расчетной области вычисляется максимальное относительное расхождение поправок на двух соседних итерациях, по которому определяется момент выхода из итерационного цикла. При проверке сходимости пропускаются узлы со значениями поправок меньше 1% от максимальной поправки по области.

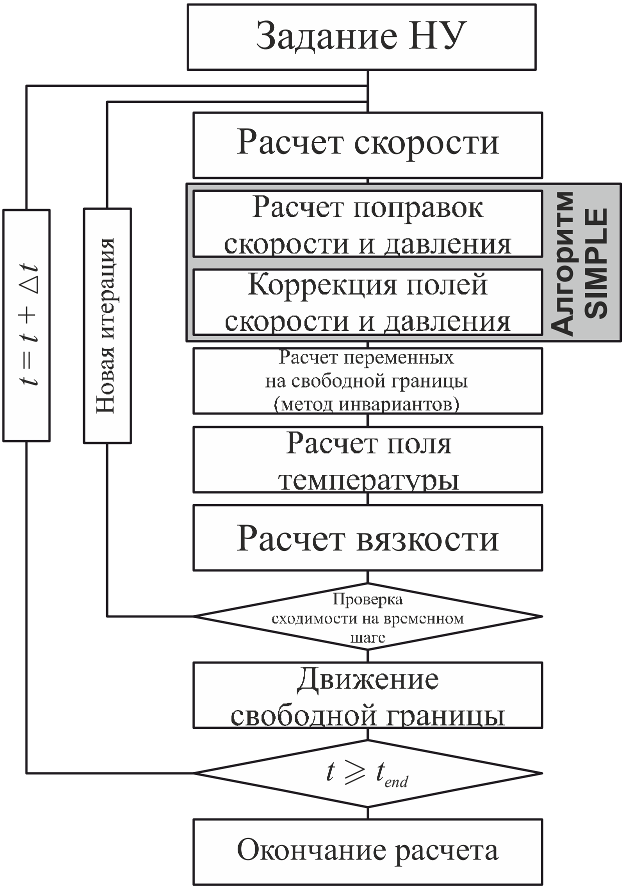


Рис. 2.8. Блок-схема алгоритма расчета

Второй итерационный цикл организован на шаге по времени. Условием выхода из него является сходимость модуля вектора скорости. Аналогично первому итерационному циклу узлы со значениями скорости меньше 1% от максимальной пропускаются при проверке сходимости.

После расчета положения маркеров на новом временном шаге выполняется процедура их перераспределения для обеспечения равномерности сетки на свободной поверхности. При этом во внутренней области по мере движения фронта свободной границы могут появляться новые расчетные узлы, а нерегулярные узлы могут становиться регулярными. В связи с этим необходимо переопределять принадлежность расчетных узлов сетки к регулярному или нерегулярному типу.

ГЛАВА 3. Заполнение плоского канала и круглой трубы неньютоновской жидкостью

Течения, реализующиеся при заполнении плоских и осесимметричных каналов, встречаются в технологических процессах многих отраслей промышленности (например, в технологии изготовления изделий из полимерных материалов методом литья под давлением). Независимо от способов изготовления того или иного изделия, все они сопровождаются сложными гидродинамическими, теплофизическими и физико-химическими процессами. Современные производства характеризуются большой производительностью перерабатывающего оборудования и высокой стоимостью технологической смеси, вследствие чего проведение натурных экспериментов реального процесса переработки полимерных материалов – дорогостоящая процедура. В этой связи исследование особенностей рассматриваемых процессов целесообразно проводить методами математического моделирования.

3.1. Математическая постановка задачи

3.1.1. Основные уравнения

Рассматривается нестационарное изотермическое течение реологически сложной несжимаемой жидкости в области Ω с границей Γ, включающей меняющуюся во времени часть Γ_1 и заданную часть Γ_2. В качестве границы Γ_2 могут выступать твердые стенки, входные/выходные сечения, в качестве Γ_1 – свободная поверхность. Силы поверхностного натяжения считаются малыми и не учитываются. Течение реализуется в поле силы тяжести. С учетом сделанных допущений основу математического описания течения неньютоновской среды образует система уравнений движения и неразрывности, которые в векторной форме имеют вид

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{3.1}$$

где t – время; $\mathbf{u}$ – вектор скорости; p – давление; ρ – плотность; $\mathbf{T}$ – тензор вязких напряжений с компонентами τ_{ij}; $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести. Система (3.1) замыкается реологическим уравнением состояния, которое связывает тензор вязких напряжений с тензором скоростей деформации. В качестве реологического уравнения используется закон Балкли–Гершеля [94], описывающий поведение нелинейной вязкопластичной среды при деформировании

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 2\eta e_{ij} \text{ при } \tau > \tau_0, \\ e_{ij} = 0 \text{ при } \tau \le \tau_0, \end{cases}$$

$$\eta = \frac{\tau_0 + K\dot{\gamma}^m}{\dot{\gamma}},$$

где η – эффективная вязкость; τ_0 – предел текучести; K – консистенция; m – степень нелинейности; $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ – компоненты тензора скоростей деформаций $\mathbf{E}$; $\tau = \left(2\tau_{ij}\tau_{ji}\right)^{0,5}$ и $\dot{\gamma} = \left(2e_{ij}e_{ji}\right)^{0,5}$ – интенсивность напряжений и скоростей деформаций соответственно. Рассматриваемая модель включает в себя реологические модели: Ньютона ($\tau_0 = 0$, $m = 1$); Оствальда – де Виля ($\tau_0 = 0$); Шведова-Бингама ($m = 1$).

Математическая постановка задачи записывается в безразмерных переменных. В качестве масштабов используются следующие величины: длины – характерный размер области течения L; скорости – характерная скорость потока U; давления – величина $K\left(U/L\right)^m$; времени – L/U. Система уравнений, описывающая изотермическое движение реологически сложной жидкости, с сохранением обозначений для безразмерных переменных записывается в виде

$$\mathrm{Re}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\left(2\eta\mathbf{E}\right) + \mathbf{W}, \qquad (3.2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Здесь $\mathrm{Re} = \frac{\rho U^{2-m}L^m}{K}$ – число Рейнольдса, $\mathbf{W} = (0, -\mathrm{W})$, $\mathrm{W} = \frac{\rho g L^{m+1}}{KU^m}$ – безразмерный критерий, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил в потоке.

Выражение для безразмерной эффективной вязкости имеет вид

$$\eta = \frac{\mathrm{Bn} + \dot{\gamma}^m}{\dot{\gamma}},$$

где $\mathrm{Bn} = \frac{\tau_0 L^m}{KU^m}$ – число Бингама.

Таким образом, задача о течении неньютоновской жидкости со свободной поверхностью сводится к определению расчетной области Ω во времени, а также составляющих вектора скорости и давления, удовлетворяющих системе уравнений (3.2), которую необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

3.1.2. Граничные условия

Уравнения (3.2) дополняются граничными и начальными условиями.

Если граница Γ_2 является твердой стенкой, то на ней задается условие прилипания, если входная или выходная граница – профиль скорости, если линия симметрии – условие симметрии.

На свободной поверхности Γ_1 в качестве граничных условий используется условие отсутствия касательного напряжения и равенства нормального внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю. Силы поверхностного натяжения считаются пренебрежимо малыми по сравнению с вязкими, инерционными и гравитационными и не учитываются. Движение свободной границы осуществляется в соответствии с кинематическим условием.

Анализ классической математической модели динамики жидкости с использованием уравнений движения и неразрывности, естественных граничных условий на свободной поверхности, условий прилипания на твердой стенке и значениях динамического краевого угла $\theta \neq 0, \pi$ показывает наличие особенностей в определении динамических характеристик течения, приводящих к бесконечному росту их значений по мере приближения к линии контакта [32, 33]. Динамический краевой угол определяется как угол между твердой стенкой со стороны жидкости и касательной плоскостью к поверхности раздела в точке контакта и называется еще макроскопическим контактным углом [95].

3.2. Структура потока при заполнении

Рассмотрим процесс заполнения плоского или осесимметричного канала вязкой жидкостью. Движения среды противоположно направлению силы тяжести и осуществляется под действием заданного перепада давления во входном сечении, обеспечивающем постоянный расход. Многочисленные исследования показывают, что течение характеризуется установившейся формой свободной поверхности, перемещающейся вдоль канала со среднерасходной скоростью. При этом в окрестности свободной границы движение имеет двумерный характер, а на некотором удалении от нее – одномерный.

3.2.1. Фонтанирующее течение

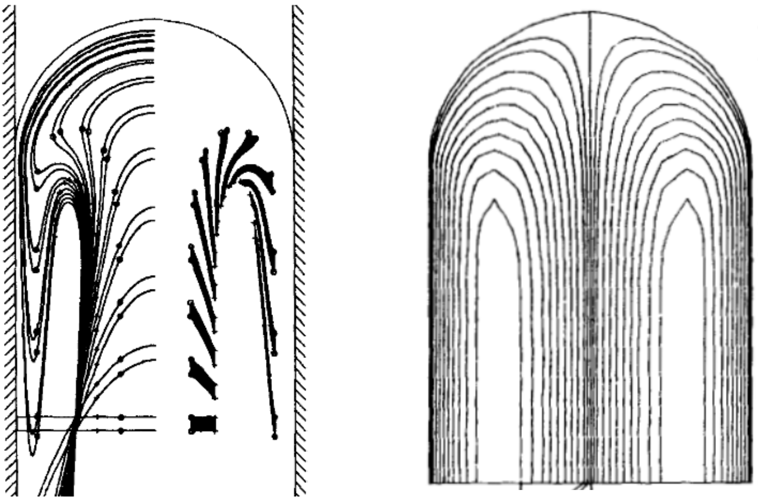
В процессе заполнения плоских или осесимметричных каналов вязкой жидкостью с постоянным расходом во входном сечении свободная поверхность принимает установившуюся форму, которая перемещается вдоль канала со среднерасходной скоростью, а в ее окрестности реализуется двумерное движение, которое принято называть фонтанирующим течением. Впервые этот термин был введен в [96] для описания потока вблизи границы раздела фаз, когда в капилляре одна жидкость вытесняет другую, и в дальнейшем широко использовался для описания результатов экспериментальных и численных исследований. Качественное описание картины фонтанирующего течения представлено в [42, 97]. В [42] методом конечных элементов находится решение стационарной задачи в подвижной системе координат, движущейся со среднерасходной скоростью, а стационарная форма свободной границы находится методом последовательных приближений, начальное приближение представляется полуокружностью. При такой постановке задачи линии тока наглядно демонстрируют фонтанирующий характер течения (рис. 3.1, *б*). Частицы жидкости, расположенные вблизи линии симметрии, догоняют свободную поверхность, перемещаются в область стенки и далее отстают от фронта свободной границы.

Качественное сравнение результатов экспериментального и численного моделирования процесса заполнения представлено в [97, 98]. Фонтанирующее течение организовано следующим образом. Вертикальный канал частично заполнен жидкостью, во входном сечении расположен неподвижный поршень, а стенки канала движутся вниз с постоянной скоростью. Такая установка удобна для проведения физического эксперимента, поскольку местоположение фронта свободной поверхности меняется на начальном промежутке времени и не требуется сложных систем видеофиксации. В некоторых случаях при численном моделировании использование математической постановки задачи в подвижной системе координат избавляет от проблем перестроения расчетных сеток. Кинематика фонтанирующего движения демонстрируется с помощью трассерных линий, которые приобретают характерные грибообразные формы в окрестности фронта, или выделенных объемов жидкости (рис. 3.1, *а*).

В работах [99, 100] рассматривается нестационарная постановка задачи, при этом установившаяся форма свободной границы, которая в начальный момент плоская, формируется с течением времени. В основе решения лежит метод конечных элементов. Предполагается, что движение ЛТК реализуется с учетом малости капиллярных эффектов и близости динамического краевого угла к π. Выполнено количественное сравнение численных и экспериментальных данных по форме свободной границы.

Моделирование процесса заполнения плоского канала степенной жидкостью МАС-методом выполнено в работе [101] и демонстрирует наличие фонтанирующего эффекта для случая неньютоновского поведения среды.

Использование метода функции уровня при моделировании заполнения плоских каналов с учетом линий спая продемонстрировано в [102]. Обзор результатов исследований течений жидкости при заполнении плоских и осесимметричных каналов представлен в [103].



а *б*

Рис. 3.1. Эволюция трассерных лиий и выделенного объема [97] (*а*), линии тока [42] (*б*)

Результаты исследования процесса заполнения плоского канала / круглой трубы в поле силы тяжести с учетом сжимаемости среды, скольжения на твердой стенке и капиллярных эффектов приведены в [43, 104]. Математическая постановка формулируется в подвижной системе координат, а решение получено с помощью метода конечных элементов. Установившаяся форма свободной границы находится методом последовательных приближений аналогично [42]. Представлены зависимости формы свободной границы и распределений кинематических и динамических характеристик от безразмерных критериев подобия.

Применение метода граничных элементов для решения задач о заполнении прямоугольного канала, плоского канала с центральным телом в приближении ползущего течения описано в работах [54, 105–107]. Результаты моделирования заполнения канала вязкоупругой жидкостью представлены в [30, 108, 109].

3.2.2. Кинематика течения

В технологии переработки полимерных материалов методом литья под давлением деформация среды, происходящая на стадии заполнения, оказывает большое влияние на пространственное распределение свойств и конечные характеристики готового изделия. В связи с этим изучению структуры течения уделяется большое внимание. Анализ потока проводится с помощью выделенных объемов жидкости или трассерных линий, эволюция которых позволяет судить о морфологии конечного изделия.

При заполнении плоских и осесимметричных каналов область течения на некотором удалении от свободной поверхности описывается как одномерный поток, а жидкий элемент деформируется в сдвиговом потоке. Течение в окрестности фронта свободной границы имеет двумерный характер и влияет на ориентацию жидких элементов. Экспериментальные работы исследуют структуру потока и пространственное распределение свойств, подкрашивая жидкость [97, 110, 111] или используя фотографии готовых изделий, полученных с помощью трехмерной рентгеновской компьютерной томографии с высоким разрешением [112].

В работе [113] описывается сложная картина деформации квадратного элемента, расположенного в начальный момент времени вблизи линии симметрии в области одномерного течения. Выделенный элемент растягивается, попадая в области фонтанирующего течения, перемещается к стенке и образует характерные V-образные формы. В [114] предложена модель для объяснения распределения молекулярной ориентации, наблюдаемой при формовании аморфных полимеров. Модель основана на механизмах переноса вещества и тепла в сочетании с молекулярной теорией. Исследование механизмов формирования морфологии при литьевом формовании полипропилена экспериментально и численно исследуется в работе [115].

В [116] представлены экспериментальные и численные результаты исследований молекулярной ориентации при заполнении плоского канала жидкостью Карро с зависимостью параметров реологического закона от температуры. Численная методика основана на методе контрольного объема с привлечением технологии VOF для отслеживания местоположения свободной поверхности. Эволюция трассерных линий с течением времени, демонстрирующая кинематику фонтанирующего течения жидкости Карро, в плоском и пространственном случаях представлена в [117].

Моделирование ориентации волокон, растворенных в ньютоновской жидкости, при заполнении плоского канала с использованием метода функции уровня выполнено в работе [118].

3.3. Алгоритмы расчета течений неньютоновских сред

3.3.1. Общие сведения

Быстрое развитие вычислительной техники и аппарата математического моделирования в течение последних шестидесяти лет привело к появлению большого числа работ, посвященных численному исследованию движения вязких сред и сред с реологически сложным поведением. Исследование таких течений имеет важный практический интерес, так как многие реальные жидкости не подчиняются реологическому закону Ньютона. В частности, при переработке полимерных композиций методом литья жидкие среды характеризуются неньютоновскими реологическими свойствами [29, 119].

Многие полимерные растворы имеют следующую особенность. При их деформации какая-то часть внешней работы диссипирует, а остальная запасается в материале в виде упругого потенциала. После прекращения воздействия среда претерпевает упругое восстановление и одновременно с этим происходит диссипация накопленной упругой энергии [120]. Такие неньютоновские среды называются вязкоупругими. Для описания их поведения при деформировании используются различные модели [121, 122]. В настоящее время наиболее употребляемые численные методы в ньютоновской гидродинамике распространены на случай вязкоупругих течений. Так, в работах [109, 123, 124] с помощью методологии MAC решены задачи экструзии, струйного течения и заполнения каналов, а процессы заполнения пространственных областей моделируются в работе [125] с применением метода VOF. Течения вязкоупругих жидкостей при заполнении каналов исследуются с помощью метода конечных элементов в [108, 126–129]. Использование метода граничных элементов для исследования течений со свободной поверхностью можно найти в работах [130, 131]. В [132, 133] исследуются пространственные течения вязкоупругой жидкости Виноградова–Покровского в каналах различной конфигурации.

Другой класс неньютоновских жидкостей характеризуется нелинейной связью тензоров вязких напряжений и скоростей деформаций. Эти жидкости со сложным реологическим поведением делятся на три группы: псевдопластичные, вязкопластичные и дилатантные [134]. К первой группе относятся жидкости, у которых эффективная вязкость падает с ростом скорости сдвига. У дилатантных сред вязкость, наоборот, растет. Жидкость с пределом текучести, ниже которого она ведет себя как твердое тело, называется вязкопластичной. Обзор экспериментальных исследований течений вязкопластичных сред в плоских каналах, в каналах с произвольными сечениями и некоторых других геометриях представлен в [135]. На сегодняшний день выполнено множество работ, посвященных моделированию течений неньютоновских жидкостей рассматриваемого класса.

Исследования течений аномально вязких сред в областях, имеющих сложную геометрию, с использованием метода MAC представлены в работах [101, 136]. В них рассмотрена задача заполнения степенной жидкостью области между вертикальными коаксиальными цилиндрами. Полученные результаты численных исследований сравниваются с экспериментальными данными.

Применение метода конечных элементов для моделирования движения вязкопластичных сред со свободной поверхностью при заполнении осесимметричных пресс-форм представлено в [137–140]. В [141–145] рассмотрены движения вязкопластичной жидкости при заполнении каналов, экструзии через коаксиальный зазор, между прижимающимися пластинами и вращающимися валиками. Численные исследования проводятся с помощью метода конечных элементов. Исследование течений псевдопластичных и дилатантных сред, реализующихся при формовании изделий цилиндрической формы, с помощью метода конечных элементов представлено в [146, 147]. Применение метода VOF для моделирования течений реологически сложных жидкостей со свободными границами представлено в [148, 149]. Результаты моделирования процесса растекания вязкопластичной среды, полученные с использованием метода функции уровня, представлены в [150].

Подводя итог, можно сделать следующий вывод. В литературе представлены результаты большого количества исследований заполнения емкостей в плоской и осесимметричной постановках в приближении ньютоновского поведения жидкости. Для решения сформулированных задач используется аппарат математического моделирования с привлечением приближенных и численных методов. Значительно меньше работ для данного направления, в которых рассматривается течение неньютоновских сред, и, более того, в них представлены неполные сведения о кинематике течений и эволюции свободной поверхности в зависимости от значений реологических параметров.

3.3.2. Особенности реализации численных алгоритмов для вязкопластичной жидкости

Характерной особенностью течения жидкостей с ненулевым пределом текучести является необходимость строить решение в области с неизвестной границей. Неопределенность тензора напряжений ниже предела текучести и наличие в потоке квазитвердых ядер создают дополнительные трудности при численном моделировании. В литературе предложены две группы методов решения задач о течениях вязкопластичных сред.

Первый группа методов основана на вариационной формулировке постановки задачи [151–155]. Такой подход использует оригинальную реологическую модель, но его основным недостатком является большое время расчета, связанное с довольно медленной скоростью сходимости. Обзоры применения данного метода можно найти в работах [156, 157]. Задача о течениях вязкопластичной жидкости в каналах с различными поперечными сечениями и течении между двумя сближающимися пластинами решается с помощью вариационного метода в [158–160].

Вторая группа методов решения обходит проблемы неопределенности напряжений в квазитвердых ядрах, изменяя реологическое уравнение состояния таким образом, что оно становится гладким и определенным независимо от величины скорости сдвига, включая ноль. Регуляризация заменяет бесконечную эффективную вязкость в ядре на большую, но конечную вязкость. В [141, 161] представлен обзор схем регуляризации. Для течения в кольцевом зазоре с эксцентриситетом в [162, 163] исследована структура потока и проведено сравнение численных данных, полученных с использованием метода регуляризации, с известными аналитическими решениями и экспериментальными результатами.

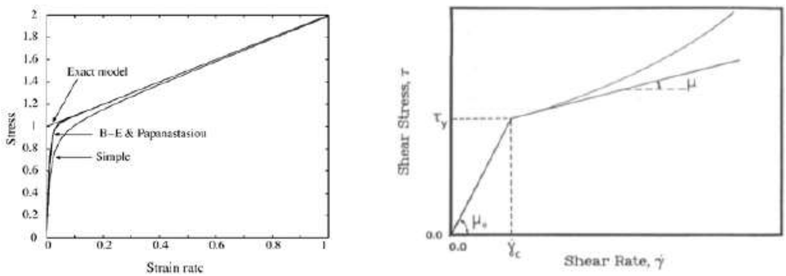
Рассмотрим основные способы регуляризации реологического закона Шведова–Бингама, представленные в литературе. Регуляризация закона Балкли–Гершеля проводится аналогичным образом. В работах [164–167] в реологическую модель вводится малый параметр ε, который ограничивает значение эффективной вязкости в области малых скоростей деформаций и практически не влияет на ее значения в остальной области.

$$\tau_{ij} = 2\left(\mu + \frac{\tau_0}{\dot\gamma + \varepsilon}\right)e_{ij}, \tag{3.3}$$

$$\tau_{ij} = 2\left(\mu + \frac{\tau_0}{\sqrt{\dot\gamma^2 + \varepsilon^2}}\right)e_{ij}, \tag{3.4}$$

$$\tau_{ij} = 2\left(\mu + \frac{\tau_0}{\dot\gamma}\left[1 - \exp\left(-\dot\gamma/\varepsilon\right)\right]\right)e_{ij}. \tag{3.5}$$

На рис. 3.2, *а* представлены кривые течения для оригинальной модели Шведова–Бингама и вычисленные с использованием различных вариантов регуляризации. Все модели в диапазоне низких скоростей деформаций ограничивают значение вязкости величиной, обратно пропорциональной параметру регуляризации. В качестве условия выделения зоны квазитвердого движения используется критерий $\tau \le \tau_0$.



а *б*

Рис. 3.2. Зависимость напряжения от скорости сдвига: *а* – [161]; *б* – [168]

Другой вариант исключения особенности [168] заключатся в замене оригинальной модели на так называемую модель с двойной вязкостью (рис. 3.2, *б*), в интервале $\dot\gamma \le \dot\gamma_c$ вязкость равна μ_0, а при $\dot\gamma > \dot\gamma_c$ – μ $(\mu \ll \mu_0)$. Сравнение аналитического решения задачи о течении в углу жидкости Балкли–Гершеля и результатов численного моделирования с использованием регуляризированных моделей показывает хорошее согласование [169].

3.4. Результаты численного моделирования

Рассматривается задача о заполнении плоского канала и круглой трубы реологически сложной жидкостью в изотермических условиях в поле силы тяжести. Область решения схематично показана на рис. 3.3. В декартовой системе координат $x_1 = x$, $x_2 = y$; цилиндрической – $x_1 = r$, $x_2 = z$.

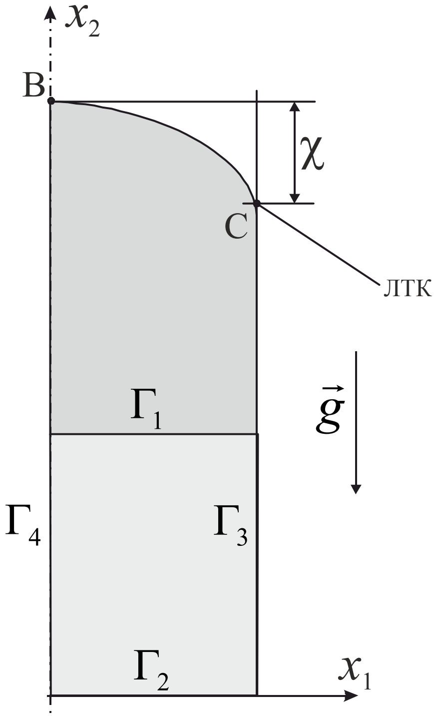


Рис. 3.3. Область решения

На входной границе Γ_2 задается профиль продольной скорости, характерный для установившегося течения в плоском / осесимметричном канале с заданным постоянным расходом, поперечная скорость равна нулю. На твердой стенке Γ_3 выполняется условие прилипания. На линии симметрии Γ_4 выполняется условие симметрии. Силы поверхностного натяжения считаются пренебрежимо малыми по сравнению с вязкими, инерционными и гравитационными и не учитываются. Граничные условия на Γ_1 заключаются в отсутствии касательных напряжений и равенстве нормального внешнему давлению. Кроме этого, свободная граница подчиняется кинематическому условию.

В начальный момент времени канал частично заполнен покоящейся жидкостью, и свободная граница расположена на достаточном удалении от входной границы Γ_2, чтобы исключить ее влияние на характер течения в окрестности последней.

Уравнения движения и неразрывности системы (3.2), записанные в проекциях на оси декартовой / цилиндрической системы координат, имеют следующий вид:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x_1}+v\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\alpha\eta\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u}{x_1}\right),$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x_1}+v\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+ \tag{3.6}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\frac{\eta}{x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\mathrm{W},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\frac{u}{x_1}=0.$$

Здесь параметр α отвечает за геометрию канала: $\alpha = 0$ соответствует плоскому каналу, $\alpha = 1$ – осесимметричному. В качестве масштабов длины используется полуширина канала или радиус трубы, скорости – среднерасходная скорость во входном сечении. Граничные условия записываются в виде

$$\Gamma_1:\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial n}+\alpha\frac{u}{x_1}=0,\quad p=2\eta\frac{\partial u_n}{\partial n};$$
$$\Gamma_2: u=0,\quad v=V\left(x_1\right);$$
$$\Gamma_3: u=0,\quad v=0; \tag{3.7}$$
$$\Gamma_4: u=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_1}=0,$$

где u_n, u_s – нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности, $V(x_1)$ – профиль скорости, соответствующий полностью развитому течению в плоском канале или круглой трубе с заданным постоянным расходом. Условия на границе Γ_1 записаны в локальной декартовой системе координат (n, s), связанной со свободной поверхностью. Кинематическое условие записано в лагранжевом представлении

$$\frac{dx_1}{dt}=u,\ \frac{dx_2}{dt}=v. \tag{3.8}$$

3.4.1. Тестирование способов расчета движения контактной линии

В текущем разделе представлены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние предложенных способов расчета динамики контактной линии на распределения кинематических и динамических характеристик фонтанирующего течения вязкой жидкости, реализующегося при заполнении вертикального плоского канала. Продемонстрировано достижение конечных значений динамических характеристик на линии трехфазного контакта, что позволяет сделать вывод об устранении сингулярности традиционной постановки задачи с использованием условия прилипания.

Рассматривается процесс заполнения плоского вертикального канала вязкой жидкостью в поле силы тяжести. Математическая постановка включает уравнения Навье–Стокса и неразрывности. На твердой стенке задаются условия прилипания, на входе – параболический профиль скорости, характерный для полностью развитого течения в бесконечном канале с заданным постоянным расходом, на свободной поверхности выполняются естественные граничные условия. Уравнения записаны в безразмерном виде с использованием полуширины канала и среднерасходной скорости во входном сечении в качестве характерных масштабов длины и скорости соответственно. В начальный момент времени канал частично заполнен жидкостью, а свободная поверхность имеет плоскую горизонтальную форму. Все расчеты в рамках текущего подраздела проводились при значениях определяющих параметров $\mathrm{Re} = 0{,}01$, $\mathrm{W} = 10$. Максимальное значение шага по времени ограничивается условием Куранта [170].

Процесс заполнения характеризуется формированием с течением времени выпуклой установившейся формы свободной поверхности, которая перемещается вдоль канала с постоянной скоростью. Рассмотрим влияние способов расчета динамики ЛТК на кинематические характеристики потока, а именно на составляющие вектора скорости и форму свободной границы. Форма свободной поверхности описывается параметром $\chi = \Delta x_2 / L$, показывающим местоположение точки B на линии симметрии относительно точки контакта C вдоль продольной координаты (рис. 3.3).

Характер установления параметра χ со временем для различных способов расчета динамики ЛТК показан рис. 3.4, *а*.

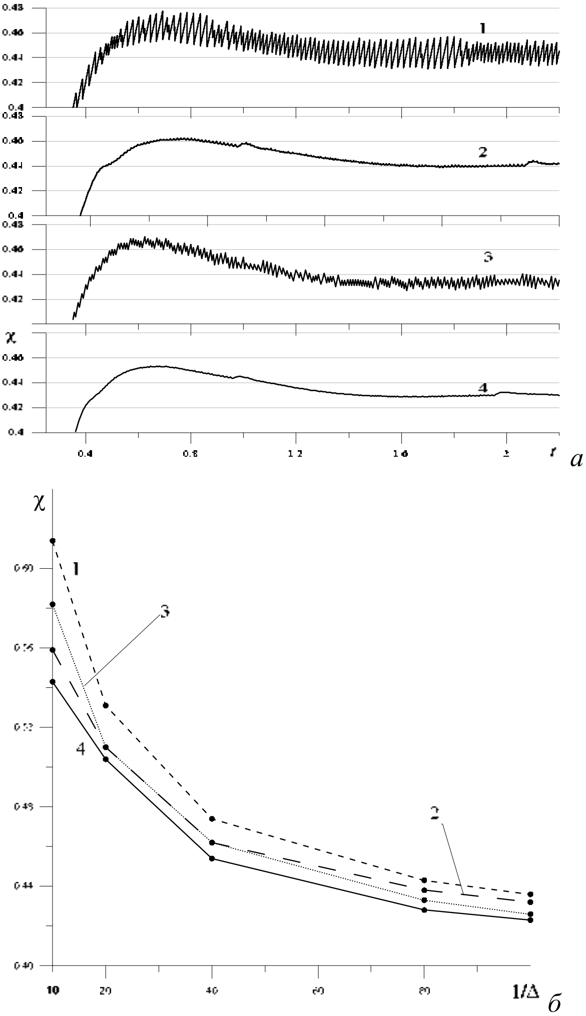


Рис. 3.4. Эволюция параметра χ со временем (*а*),
зависимость установившегося значения χ от шага сетки (*б*)

Вычисления проводились на квадратной разнесенной сетке с шагом $\Delta = 1 / 80$, при этом ошибка выполнения закона сохранения массы на рассматриваемых временных интервалах во всех расчетах не превышает 1%. Цифрами на рисунке отмечены соответствующие способы расчета, описанные в предыдущем параграфе. Для способов расчета движения ЛТК со скольжением (кривые *3*, *4*) вычисления выполнялись при значениях параметров $l = 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}001$. Как видно из графиков, для всех способов значение параметра χ устанавливается и наблюдается квазиустановление формы свободной границы. «Пилообразное» поведение характеристик для кривых *1*, *3* объясняется дискретным механизмом накатывания маркеров свободной поверхности на твердую стенку, описываемым кинематическим условием. Напротив, для способов 2, 4, в которых положение точки контакта находится из условия равенства динамического угла π, наблюдается непрерывный характер движения контактной линии и гладкое поведение характеристики χ с течением времени. Изменения амплитуды колебаний можно объяснить перестроением расчетной сетки на свободной границе.

Поведение маркеров-частиц в окрестности линии трехфазного контакта с течением времени, иллюстрирующее накатывание свободной поверхности на твердую стенку, демонстрируется на рис. 3.5 (в промежутке от 1,1 до 1,5 безразмерных единиц времени).

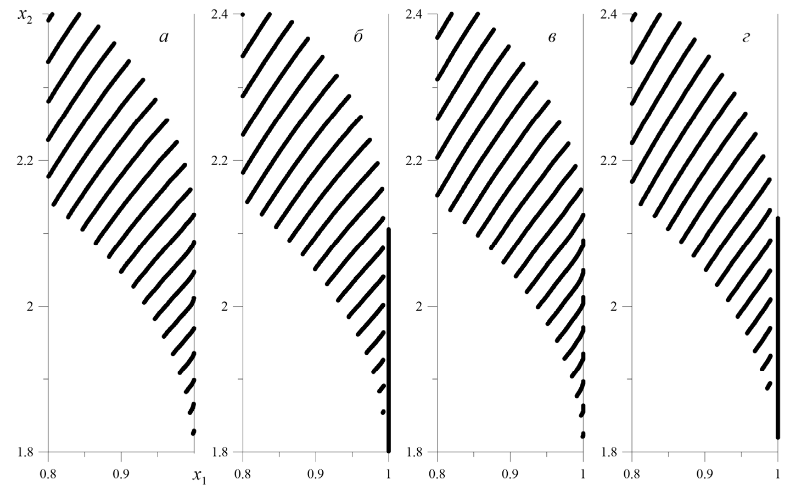


Рис. 3.5. Кинематика маркеров в окрестности линии контакта

Для способов 1 и 3 наблюдается дискретный режим движения контактной линии, который объясняет осцилляции характеристики χ. Маркеры, расположенные на свободной поверхности, перемещаются в направлении стенки, налетают на нее в определенные моменты времени, что приводит к изменению положения ЛТК. В способах 2 и 4 маркер, расположенный на стенке, перемещается непрерывно вдоль нее, сближаясь с маркером свободной поверхности. При достижении минимального критического расстояния между ними маркер свободной поверхности исключается из расчета для обеспечения устойчивости расчетов.

Изменения значения динамического краевого угла, рассчитанного по углу между стенкой и отрезком, соединяющим маркер линии контакта и ближайший к нему маркер со свободной поверхности, представлены на рис. 3.6. Для всех используемых моделей расчета динамики ЛТК отклонения значений динамического краевого угла θ от π не превышает 6 град после квазиустановления формы свободной границы. Это подтверждает предположение о значении краевого угла, близкого к π, и катящемся механизме движения фронта.

Сеточную сходимость вычисления формы свободной границы демонстрирует рис. 3.4, *б*, на котором приведены зависимости осредненных по времени значений параметра χ (после установления формы поверхности) от числа узлов внутренней разнесенной сетки. Характерный шаг сетки на свободной поверхности выбирался в полтора раза больше внутреннего шага сетки. Для всех способов расчета наблюдается сходимость, и наибольшее отличие параметра χ не превышает 5%. Вычисленные значения χ хорошо согласуются с данными работы [43]. Координаты точек фронта потока для разных способов расчета после квазиустановления в момент времени $t = 3$ представлены в табл. 3.1.

Сравнительный анализ показывает, что формы практически не отличаются на большей части поверхности за исключением лишь небольшой окрестности линии контакта. Сравнение распределений кинематических характеристик в точках свободных поверхностей приведено в таблице 3.2. Наблюдается хорошее согласование результатов на большей части границы для всех тестируемых способов расчета динамики контактной линии.

Таким образом, анализируя полученные результаты, можно сделать следующий вывод. Все способы расчета движения ЛТК обеспечивают сходимость вычислительного алгоритма формы границы и согласование расчетных кинематических характеристик потока. Численная реализация традиционной постановки задачи, содержащей сингулярность, не приводит к нефизичным результатам при вычислении составляющих вектора скорости для выбранных значений определяющих параметров.

Рассмотрим влияние способов расчета движения контактной линии на динамические характеристики потока, в качестве которых выбраны диссипативная функция E и касательное напряжение τ_1.

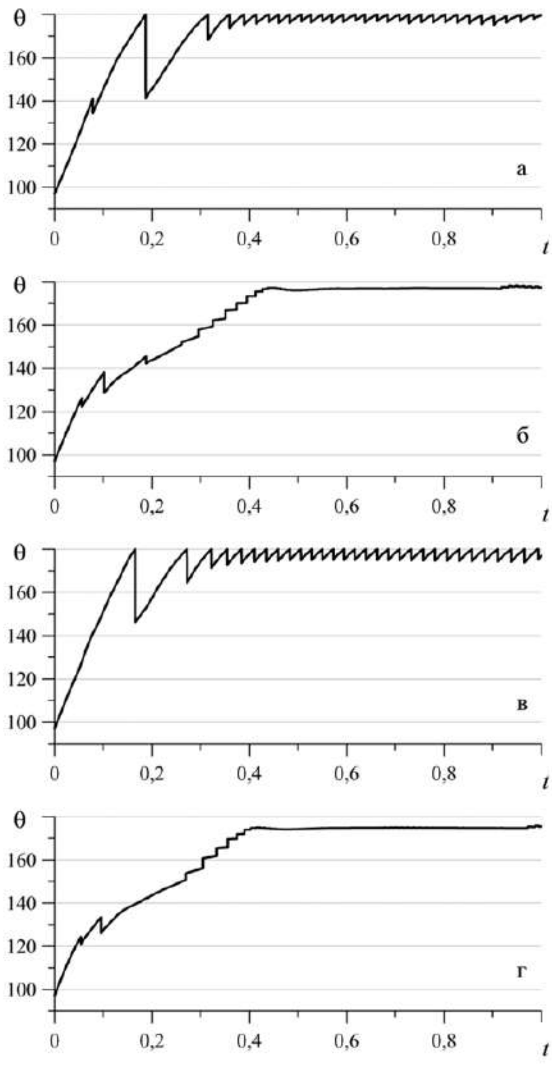


Рис. 3.6. Изменение динамического краевого угла во времени

Таблица 3.1

Координаты точек свободной границы, полученные при использовании различных способов расчета, в момент времени t = 3

x_1	Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4
0	4,1006	4,1013	4,0993	4,1009
0,1	4,0987	4,0994	4,0974	4,0989
0,2	4,0929	4,0936	4,0916	4,0932
0,3	4,0829	4,0837	4,0817	4,0833
0,4	4,0682	4,069	4,0672	4,0687
0,5	4,048	4,0488	4,0472	4,0486
0,6	4,0209	4,0217	4,0202	4,0217
0,7	3,9845	3,9853	3,9842	3,9854
0,8	3,9343	3,9351	3,9345	3,9355
0,9	3,8593	3,8600	3,8600	3,8608
0,95	3,8023	3,8029	3,8036	3,8041
1	3,6647	3,6603	3,6701	3,6686

Таблица 3.2

Значения продольной и поперечной скоростей в различных точках свободной границы

x_1	Способ 1		Способ 2		Способ 3		Способ 4	
	u	v	u	v	u	v	u	v
0	0	0,9990	0	0,9997	0	0,9991	0	0,9995
0,1	0,0705	0,9962	0,0707	0,9969	0,0693	0,9964	0,0697	0,9968
0,2	0,1404	0,9879	0,1409	0,9886	0,1381	0,9883	0,1390	0,9885
0,3	0,2094	0,9731	0,2101	0,9737	0,2058	0,974	0,2073	0,974
0,4	0,2768	0,9507	0,2778	0,9512	0,2719	0,9522	0,2739	0,9518
0,5	0,3415	0,9182	0,3428	0,9186	0,3350	0,9207	0,3377	0,9199
0,6	0,4018	0,8717	0,4032	0,8722	0,3937	0,8758	0,3967	0,8746
0,7	0,4538	0,8047	0,4554	0,8050	0,4440	0,8112	0,4473	0,8091
0,8	0,4876	0,7042	0,4890	0,7045	0,4760	0,7140	0,4799	0,7117
0,9	0,4735	0,5393	0,4750	0,5382	0,4600	0,5591	0,4636	0,5495
0,95	0,4237	0,4160	0,4260	0,4130	0,4134	0,4399	0,4164	0,4315
1	0	0	0	0	0	0,1058	0	0,0983

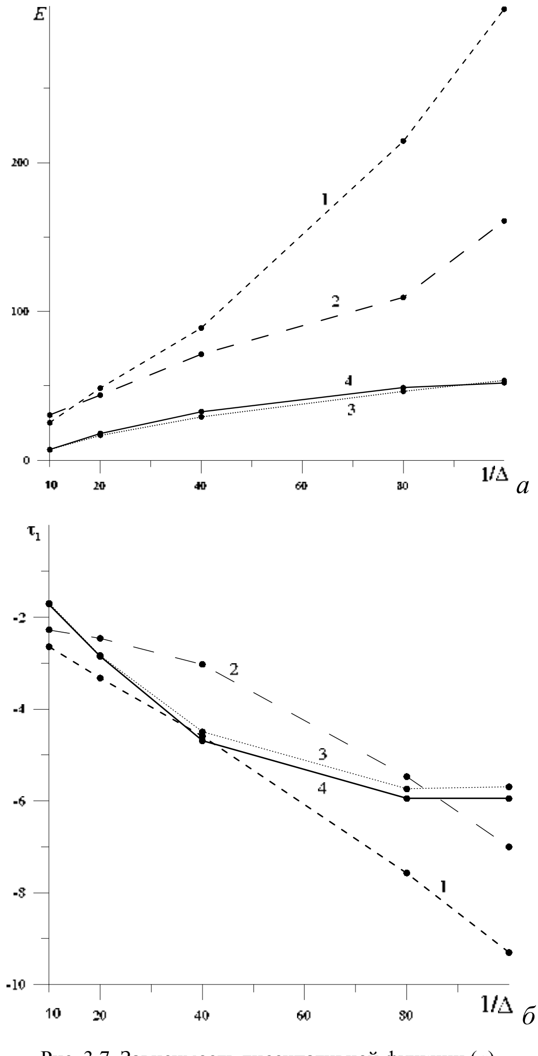


Рис. 3.7. Зависимость диссипативной функции (*а*),
касательного напряжения (*б*) от шага сетки Δ

На рис. 3.7–3.9 иллюстрируется это влияние в зависимости от шага внутренней разнесенной сетки Δ. Зависимости значения диссипативной функции, вычисленного в точке контакта, от шага сетки для используемых способов расчета движения контактной линии приведены рис. 3.7, *а*.

Как видно из графиков, наблюдается непрерывный рост значений E для способов расчета с выполнением условия прилипания на ЛТК (кривые *1*, *2*). Отсутствие сходимости для первого способа (кривая *1*) согласуется с наличием сингулярности на контактной линии. Расходимость для второго способа (кривая *2*), возможно, связана с наличием ошибки аппроксимации в выполнении условия равенства динамического угла π. С другой стороны, результаты, касающиеся расчетов с использованием условия проскальзывания вдоль стенки в малой окрестности ЛТК, показывают сходимость с уменьшением шага сетки.

Аналогичные тенденции наблюдаются для значений касательного напряжения τ_1 (см. рис. 3.7, *б*), значение которого рассчитывалось в точке твердой стенки, смещенной вниз от точки трехфазного контакта на расстоянии 0,01 безразмерных единиц, так как на линии контакта задается условие отсутствия касательного напряжения. Кривые *3*, *4* демонстрируют сеточную сходимость к конечным значениям, и, напротив, кривые *1*, *2* – непрерывный рост, подтверждая сингулярность постановки задачи. Таким образом, представленные расчетные данные на последовательности сеток согласуются с наличием сингулярности в определении динамических характеристик на линии контакта для традиционной математической постановки задачи с условием прилипания. При этом подтверждается факт, что использование условия проскальзывания исключает эту сингулярность [75].

Распределения диссипативной функции в области фонтанирующего течения после установления формы свободной поверхности проиллюстрированы на рис. 3.8, *а*. В области отрицательных значений координаты x_1 представлены результаты вычислений с применением первого способа расчета движения контактной линии, в области положительных значений – для четвертого способа расчета. Видно, что распределения диссипативной функции совпадают в большей части потока. Отличия в распределении изолиний диссипативной функции наблюдаются в малой окрестности линии трехфазного контакта и демонстрируются на рис. 3.8, *б*. Для обоих способов расчета наибольшие значения функции E достигаются на контактной линии.

Анализируя графики, можно сделать вывод, что способ расчета движения линии контакта практически не влияет на распределение диссипативной функции в большей части потока, значительные расхождения наблюдаются лишь в малой окрестности контактной линии. На рис. 3.9 показаны поля распределения касательного напряжения для аналогичных условий. Здесь также наблюдается совпадение изолиний в большей части области течения (рис. 3.9, *а*) и отличие в малой окрестности линии контакта (рис. 3.9, *б*).

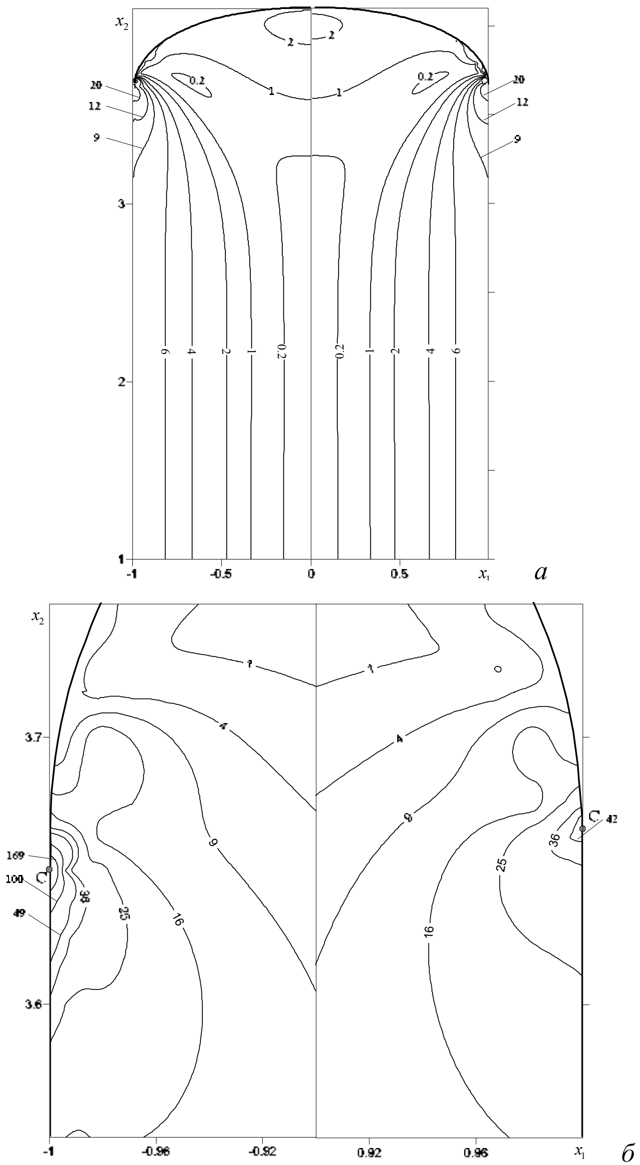


Рис. 3.8. Изолинии функции E в момент $t = 3$ для первого и четвертого способов расчета в области (*а*) и окрестности ЛТК (*б*)

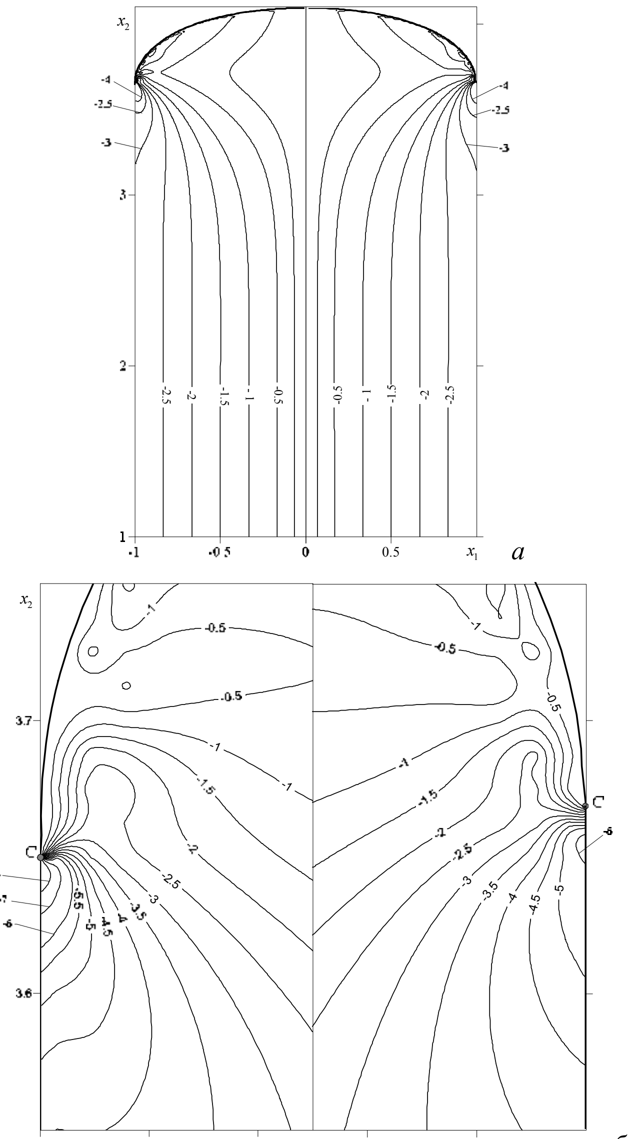


Рис. 3.9. Распределение касательного напряжения τ_1 в момент $t = 3$ для первого и четвертого способов расчета в области (*а*) и окрестности ЛТК (*б*)

В результате проведенного исследования показано влияние моделей динамики ЛТК на кинематические и динамические характеристики течения вязкой жидкости со свободной границей без учета капиллярных сил и сходимость вычислительного алгоритма. Способы расчета движения контактной линии основаны на использовании условий прилипания и проскальзывания при значении динамического краевого угла, равного π. Результаты расчетов динамических характеристик, в частности диссипативной функции и касательного напряжения, свидетельствуют об отсутствии сходимости численного метода, подтверждая сингулярность постановки задачи, при использовании условия прилипания в контактной точке и о ее наличии при использовании условия скольжения. Для рассматриваемых условий течения влияние особенностей расчета движения в точке контакта на характеристики потока проявляется в малой окрестности этой точки. Все дальнейшие расчеты в настоящей работе выполнены с использованием четвертого способа расчета динамики контактной линии, за исключением задачи, рассмотренной в гл. 5.

3.4.2. Установившееся течение в плоском канале и круглой трубе

Рассмотрим установившееся изотермическое течение неньютоновской жидкости в плоском канале или круглой трубе под действием заданного перепада давления на единицу длины δp, который обеспечивает единичный расход через единицу площади. Течение осуществляется в положительном направлении оси x_2, т.е. $\delta p < 0$. Введем обозначения $x = x_1$. Тогда с учетом сделанных допущений уравнение движения системы (3.6) упрощается до обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\eta\frac{dv}{dx}\right)+\alpha\frac{\eta}{x}\frac{dv}{dx}=\delta p \qquad (3.9)$$

с граничными условиями на линии симметрии и твердой стенке

$$\frac{dv}{dx}=0 \text{ при } x=0,$$

$$v=0 \text{ при } x=1.$$

Уравнение (3.9) можно переписать в виде

$$\frac{1}{x^{\alpha}}\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\eta\frac{dv}{dx}\right)=\delta p. \qquad (3.10)$$

Проинтегрируем (3.10) один раз и найдем константу интегрирования из граничного условия на линии симметрии

$$\eta \frac{dv}{dx} = \frac{\delta p\, x}{\alpha + 1}. \tag{3.11}$$

Из последнего уравнения видно, что производная скорости по x отрицательная величина на интервале $0 < x \le 1$. Тогда выражение для интенсивности тензора скоростей деформации с учетом убывания скорости в направлении стенки запишется в виде

$$\dot{\gamma} = \left| \frac{dv}{dx} \right| = -\frac{dv}{dx}.$$

В случае ньютоновского поведения среды безразмерная вязкость постоянна и равна единице, а решение уравнения (3.11) с учетом граничного условия на твердой стенке имеет вид

$$v = \frac{\delta p}{2(\alpha + 1)} \left(x^2 - 1 \right).$$

Значения перепада δp подбираются из условия равенства объемного расхода жидкости через единицу площади единице

$$2^{\alpha} \int_0^1 v x^{\alpha} dx = 1.$$

Выполнив математические преобразования, получим следующие выражения для перепада давления и профиля скорости:

$$\begin{gathered} \delta p = -(\alpha + 1)(\alpha + 3), \\ v = \frac{\alpha + 3}{2} \left(1 - x^2 \right). \end{gathered} \tag{3.12}$$

В случае течения степенной жидкости выражение для эффективной вязкости определяется формулой

$$\eta = \left(-\frac{dv}{dx} \right)^{m-1}.$$

Тогда решение дифференциального уравнения (3.11) запишется следующим образом:

$$v = \left(\frac{-\delta p}{\alpha + 1} \right)^{1/m} \frac{m}{m+1} \left(1 - x^{1+1/m} \right).$$

Выполнив интегрирование по сечению канала / трубы, можно записать следующую формулу для значения перепада давления и выражение для распределения скорости:

$$\delta p = -(\alpha + 1) \left(\frac{(2 + \alpha) m + 1}{m} \right)^{m},$$

$$v = \frac{(2+\alpha)m+1}{m+1}\left(1 - x^{1+1/m}\right). \qquad (3.13)$$

Рассмотрим задачу об установившемся течении жидкости Шведова–Бингама в плоском канале / круглой трубе [3, 171–175] под действием градиента давления δp, который обеспечивает единичный расход. В случае установившегося течения жидкости с пределом текучести область течения можно разбить на два участка. На одном участке, который расположен около плоскости симметрии ($0 \le x \le h$), значение скорости v постоянно. Этот участок называется квазитвердым ядром. На втором участке ($h < x \le 1$), который можно назвать областью сдвигового течения, профиль скорости удовлетворяет уравнению (3.11). На границе двух участков профиль скорости и его производная должны быть непрерывными

$$\begin{gathered} v\big|_{x\to h-0} = v\big|_{x\to h+0}, \\ \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x\to h-0} = \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x\to h+0} = 0. \end{gathered} \qquad (3.14)$$

В случае установившего течения выражение для эффективной вязкости в области сдвигового течения записывается следующим образом:

$$\eta = -\frac{\mathrm{Bn} - \dfrac{dv}{dx}}{\dfrac{dv}{dx}}.$$

Максимальное абсолютное значение напряжения достигается в области сдвигового течения на твердой стенке и из (3.11) равно

$$\tau_{\max} = \left|\eta \frac{dv}{dx}\right|_{x=1} = \frac{|\delta p|}{\alpha+1}.$$

При малых перепадах давления, удовлетворяющих условию

$$\tau_{\max} = \frac{|\delta p|}{\alpha+1} < \mathrm{Bn}, \qquad (3.15)$$

движение жидкости не происходит. Подставим выражение для эффективной вязкости в (3.11) и выразим значение производной

$$\frac{dv}{dx} = \mathrm{Bn} + \delta p \frac{x}{1+\alpha}. \qquad (3.16)$$

Воспользовавшись вторым условием (3.14), можно найти координату границы ядра

$$h = -\frac{1+\alpha}{\delta p}\,\mathrm{Bn}. \qquad (3.17)$$

Проинтегрируем уравнение (3.16)

$$v = \mathrm{Bn}\,x + \delta p \frac{x^2}{2(1+\alpha)} + C.$$

Константу C найдем из условия прилипания на стенке

$$v = \delta p \frac{x^2}{2(1+\alpha)} + \mathrm{Bn}\,x - \left(\frac{\delta p}{2(1+\alpha)} + \mathrm{Bn}\right).$$

Используя первое условие (3.14), найдем значение скорости в области квазитвердого движения

$$v_0 = v(h) = u_0 = -\frac{\delta p}{2(1+\alpha)}(1-h)^2.$$

В результате выражение для профиля скорости запишется следующим образом:

$$v = \begin{cases} v_0, & 0 \le x \le h; \\ v_0\left[1-\left(\dfrac{x-h}{1-h}\right)^2\right], & h < x \le 1. \end{cases} \qquad (3.18)$$

Проинтегрировав выражение (3.18) по сечению канала / трубы и приравняв его единице, получим уравнение для определения перепада давления δp

$$-\frac{\mathrm{Bn}}{2}\frac{\alpha}{\alpha+2}\left(-\frac{(1+\alpha)\mathrm{Bn}}{\delta p}\right)^{\alpha+2} - \frac{\delta p}{(1+\alpha)(3+\alpha)} - \frac{\mathrm{Bn}}{\alpha+2} -$$

$$-\frac{\delta p}{2(\alpha+3)}\left(-\frac{(1+\alpha)\mathrm{Bn}}{\delta p}\right)^{\alpha+3} = 1.$$

Для случая течения в плоском канале ($\alpha = 0$) получим следующее кубическое уравнение:

$$2\delta p^3 + 3(\mathrm{Bn}+2)\delta p^2 - \mathrm{Bn}^3 = 0.$$

Параметр δp является корнем последнего уравнения, удовлетворяющим условию (3.15), который можно найти с помощью тригонометрической замены Виета [176]:

$$\delta p = -(\mathrm{Bn}+2)\left\{\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(1-2\left(\frac{\mathrm{Bn}}{\mathrm{Bn}+2}\right)^3\right)\right] + 0{,}5\right\}.$$

В случае круглой трубы ($\alpha = 1$) уравнение имеет вид

$$3\delta p^4 + 8(\mathrm{Bn}+3)\delta p^3 + 16\mathrm{Bn}^4 = 0,$$

а его корень, который удовлетворяет (3.15), можно найти, воспользовавшись решением Декарта–Эйлера

$$\delta p = -\sqrt{\frac{4}{3}\mathrm{Bn}^2\mathrm{ch}(\phi) + \frac{4}{9}(\mathrm{Bn}+3)^2 - 2\sqrt[4]{A^2+B^2}\cos\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{B}{A}\right)} - \frac{2(\mathrm{Bn}+3)}{3},$$

где

$$\phi = \frac{1}{3}\mathrm{Arch}\left(\frac{\mathrm{Bn}+3}{\mathrm{Bn}}\right)^2,$$

$$A = -\frac{2}{3}\mathrm{Bn}^2\mathrm{ch}(\phi) + \frac{4}{9}(\mathrm{Bn}+3)^2,$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Bn}^2\mathrm{sh}(\phi).$$

Влияние параметра Бингама на величину перепада давления δp и ширину зоны квазитвердого движения h демонстрирует рис. 3.10. Типичные распределения продольной скорости для различных значений критериев Бингама представлены на рис. 3.11. Видно, что с усилением пластических свойств необходимо увеличивать градиент давления, чтобы обеспечить заданный расход жидкости, при этом размер квазитвердого ядра увеличивается, а значение скорости в нем уменьшается.

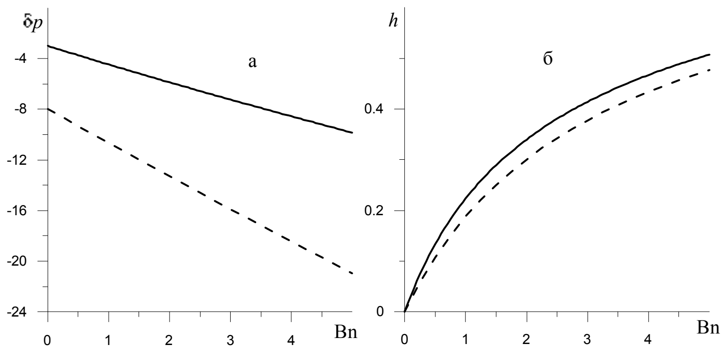


Рис. 3.10. Зависимость градиента давления (*а*) и ширины зоны квазитвердого движения (*б*) от Bn (сплошная линия – $\alpha = 0$, пунктирная – $\alpha = 1$)

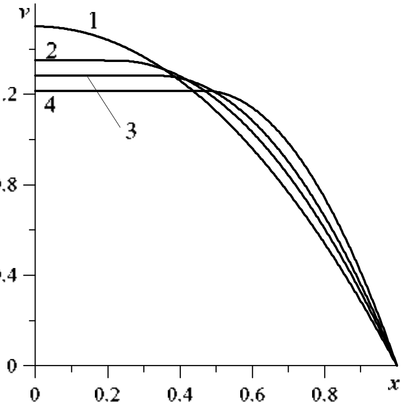


Рис. 3.11. Распределение скорости (α = *0, 1, 2, 3, 4* – Bn = 0, 1, 2, 4)

Рассмотрим установившееся течение жидкости Балкли–Гершеля в плоском канале / круглой трубе с заданным постоянным расходом [177]. Процедура получения решения аналогична случаю течения жидкости Шведова–Бингама. Профиль скорости определяется формулой

$$v = \begin{cases} v_0, \ \ 0 \le x \le h; \\ v_0 \left[1 - \left(\dfrac{x-h}{1-h} \right)^{1+\frac{1}{m}} \right], \ \ h < x \le 1, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $v_0 = \left(-\dfrac{\delta p}{1+\alpha} \right)^{\frac{1}{m}} \dfrac{m}{1+m} (1-h)^{1+\frac{1}{m}}$ – значение скорости в ядре. Уравнение для определения градиента δp получается интегрированием профиля скорости на рассматриваемом интервале и для плоского канала имеет вид

$$(-\delta p)^{\frac{1}{m}} m \left(1 + \frac{\mathrm{Bn}}{\delta p} \right)^{1+\frac{1}{m}} \left(1 + m - \frac{m\mathrm{Bn}}{\delta p} \right) = (1+m)(2m+1), \tag{3.20}$$

для круглой трубы [178]

$$\left(-\frac{\delta p}{2} \right)^{\frac{1}{m}} m \left(1 + \frac{2\mathrm{Bn}}{\delta p} \right)^{1+\frac{1}{m}} \left\{ 2m^2 \left(-\frac{\delta p}{2} \right)^2 + 2m(m+1)\left(-\frac{\delta p}{2} \right) + \left(2m^2 + 3m + 1 \right) \right\} =$$
$$= \left(6m^2 + 5m + 1 \right)(m+1).$$

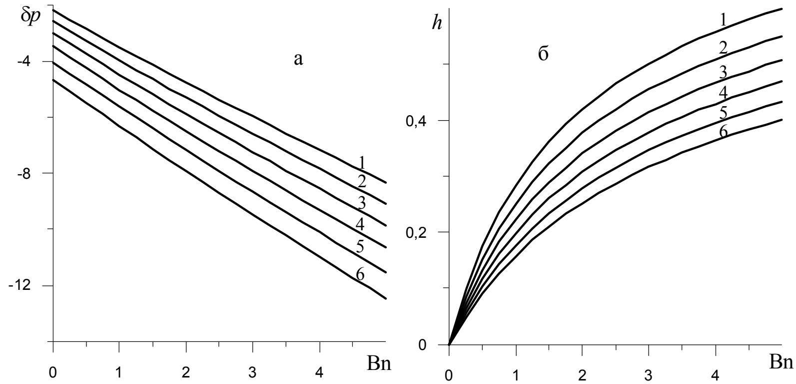


Рис. 3.12. Зависимость градиента давления (*а*) и ширины зоны квазитвердого движения (*б*) от Bn (α = *0, 1, 2, 3, 4, 5* – *m* = 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4)

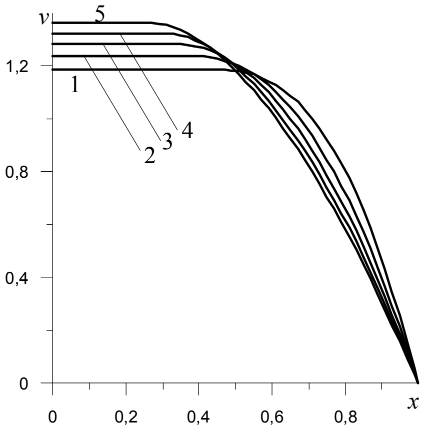


Рис. 3.13. Распределение скорости при Bn=2 (α = *0, 1, 2, 3, 4, 5* – *m* = 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4)

Параметр δp является корнем этих уравнений, удовлетворяющим условию (3.15), значение которого можно найти с помощью итерационного метода Ньютона с начальным приближением $-(\alpha + 1)$Bn. Графики зависимости градиента давления δp и ширины зоны квазитвердого движения от параметра Бингама при различных значениях степени нелинейности представлены на рис. 3.12 для случая плоского канала. Для круглой трубы качественных отличий не наблюдается. Влияние реологических параметров на распределение скорости демонстрирует рис. 3.13.

3.4.3. Методические расчеты

Для тестирования алгоритма расчета кинематических и динамических характеристик рассматривается задача о стационарном течении жидкости в плоском канале и круглой трубе. Область решения схематично показана на рис. 3.14, *а*.

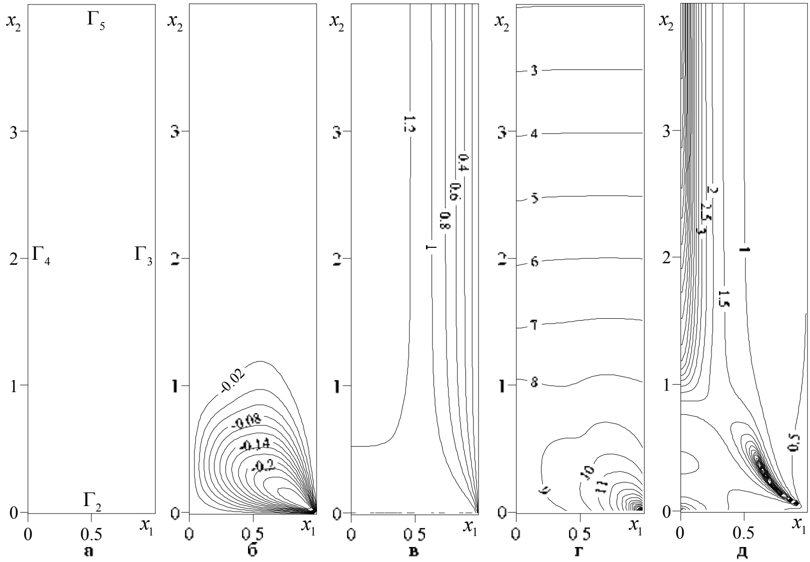


Рис. 3.14. Область течения (*а*), распределения скоростей *u* (*б*), *v* (*в*), давления *p* (*г*) и эффективной вязкости η (*д*) при Re=0,01, *m*=0,5, α=0, ε=10^{-2}

На входе Γ_2 задается единичный профиль продольной скорости, а поперечная равна нулю. На стенках Γ_3 выполняются условия прилипания, на линии симметрии Γ_4 – условия симметрии, на выходе Γ_5 – мягкие граничные условия, заключающиеся в отсутствии поперечной скорости и равенстве производной продольной скорости по координате x_2 нулю. Длина канала выбирается достаточной, чтобы входная граница не влияла на характер течения в выходном сечении. Стационарное решение поставленной задачи находится с помощью метода установления.

Кинематика течения характеризуется наличием в потоке двух зон. В окрестности входной границы реализуется участок гидродинамической стабилизации, на котором происходит перестроение единичного профиля скорости в полностью развитый. В остальной части канала течение имеет одномерный характер. Таким образом, в выходном сечении реализуется профиль скорости, характерный для установившегося течения с единичным расходом.

Аппроксимационную сходимость алгоритма расчета в случае течения ньютоновской жидкости демонстрирует табл. 3.3, в которой представлены вычисленные значения скорости на линии симметрии v_0 и значения перепада давления $\delta p'$ в выходном сечении. Соответствующие относительные отклонения от аналитических значений рассчитывается по формулам

$$E_v = \frac{|v(0) - v_0|}{v(0)} 100\%,$$

$$E_{\delta p} = \frac{|\delta p' - \delta p|}{\delta p} 100\%,$$

где $v(0)$ – аналитическое значение скорости в точке $x = 0$, δp – аналитическое значение перепада давления, определенное по формуле (3.12).

Таблица 3.3

Вычисленные значение скорости v_0 и перепада δp на последовательности сеток (Re=0,01)

α=1					α=0				
Δ	v_0	E_v %	$\delta p'$	$E_{\delta p}$ %	Δ	v_0	E_v %	$\delta p'$	$E_{\delta p}$ %
0,1	1,9851	0,75	–7,9602	0,497	0,1	1,4944	0,37	–2,9962	0,125
0,05	1,9962	0,19	–7,9900	0,125	0,05	1,4986	0,09	–2,9991	0,031
0,025	1,9991	0,05	–7,9977	0,028	0,025	1,4996	0,02	–2,9999	0,003
0,0125	1,9993	0,03	–7,9996	0,004	0,0125	1,4999	0,01	–3,00003	0,001

Здесь Δ – шаг расчетной сетки.

В случае течения степенной жидкости возникает особенность «бесконечной» вязкости при $\dot{\gamma} \to 0$, которая в рассматриваемом течении реализуется на линии симметрии. Для обеспечения устойчивости и точности расчетов течений степенной жидкости в областях малых значений скоростей деформаций требуется дополнительная регуляризация реологической модели, подобная регуляризации модели вязкопластичной жидкости для обеспечения сквозного расчета течений без явного выделения квазитвердых ядер [161]. В работе тестируются два варианта:

$$\eta = \left(\dot{\gamma} + \varepsilon\right)^{m-1}, \tag{3.21}$$

$$\eta = \left(\dot{\gamma}^2 + \varepsilon^2\right)^{\frac{m-1}{2}}, \tag{3.22}$$

где ε – параметр регуляризации. Процедура регуляризации является оправданной как физически, так и с точки зрения вычислительной гидродинамики. С одной стороны, регуляризация обеспечивает высокое, но конечное значение эффективной вязкости в области малых скоростей сдвига, что соответствует физическому содержанию понятия вязкости, с другой – модификация выражения для эффективной вязкости способствует сходимости вычислительного алгоритма.

На рис. 3.14, *б–д* представлены распределения характеристик потока, вычисленные с использованием модели (3.22). В окрестности границы Γ_2 формируется участок гидродинамической стабилизации. В остальной части канала реализуется одномерное течение. Результаты расчетов в выходном сечении сравнивались с аналитическим решением эквивалентной одномерной задачи (3.13).

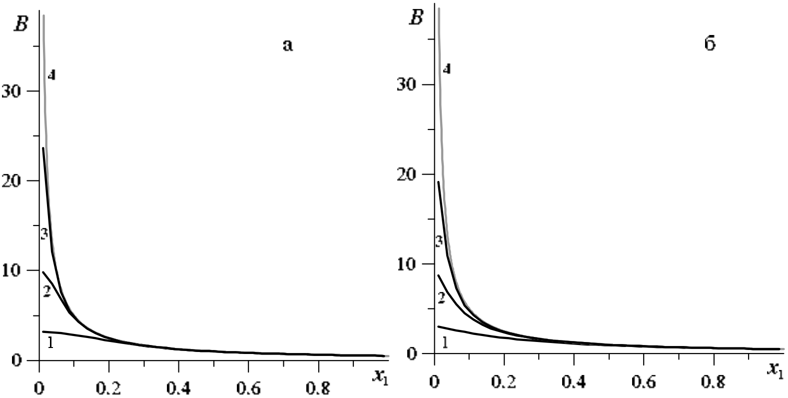


Рис. 3.15. Профиль эффективной вязкости жидкости в выходном сечении канала при m = 0,5, Δ = 1/40, Re = 0,1 и различных значениях параметра регуляризации: *1* – ε = 0,1; *2* – 0,01; *3* – 0,001; *4* – аналитическое решение

Аналитическое и вычисленные распределения эффективной вязкости в выходном сечении с использованием моделей (3.21) и (3.22) представлены на рис. 3.15, *а* и *б* соответственно. Обе модели ограничивают значение вязкости величиной ε^{m-1}. Видно, что с уменьшением параметра регуляризации вычисленные распределения вязкости стремятся к аналитическому. Однако начиная с некоторого значения ε, при дальнейшем его уменьшении, наблюдается рост ошибки E в определении скорости (табл. 3.4). Рост ошибки можно объяснить большими значениями производных вязкости в окрестности линии симметрии и уменьшением точности разностного представления исходной дифференциальной системы уравнений.

Результаты тестирования аппроксимационной сходимости алгоритма расчета с использованием модели регуляризации (3.22) представлены в табл. 3.5. Видно, что с уменьшением шага квадратной сетки ошибка E_v уменьшается. Начиная с сетки 1/80, ошибка растет. Все дальнейшие вычисления проводились с использованием модели (3.22) для значений $\Delta = 1/40$ и $\varepsilon = 0{,}01$.

Таблица 3.4

Зависимость ошибки E_v от ε (m=0,5, Δ=1/40, Re=0,1, α=0)

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
E_v, регуляризация (3.21)	1,491	0,244	0,148	0,078
E_v, регуляризация (3.22)	0,462	0,081	0,150	0,152

Таблица 3.5

Зависимость ошибки E_v от шага сетки Δ (Re=0,1, ε=0,01, m =0,5)

	α=0	α=1
Δ=1/10	0,266	0,748
Δ=1/20	0,071	0,107
Δ=1/40	0,081	0,039
Δ=1/80	0,017	0,028
Δ=1/160	1,110	0,002

Модель Балкли–Гершеля имеет особенность «бесконечной» эффективной вязкости в областях малых скоростей деформаций ($\dot{\gamma} \to 0$), которая реализуется в квазитвердых ядрах. При использовании метода сквозного счета течений вязкопластичной среды без выделения квазитвердых ядер для обеспечения устойчивости и точности расчетов в областях малых значений $\dot{\gamma}$ требуется дополнительная регуляризация реологической модели [161, 164, 166].

Для проверки достоверности результатов расчетов течений вязкопластичных сред с использованием регуляризации проведены дополнительные исследования. В качестве условия выделения зон квазитвердого движения используется неравенство $\eta\dot{\gamma} \le \mathrm{Bn}$, которое является безразмерным аналогом условия выделения областей течения с уровнем напряжений, меньшим предела текучести. На рис. 3.16 представлены распределения характеристик течения жидкости Шведова–Бингама, вычисленные с использованием модели [164].

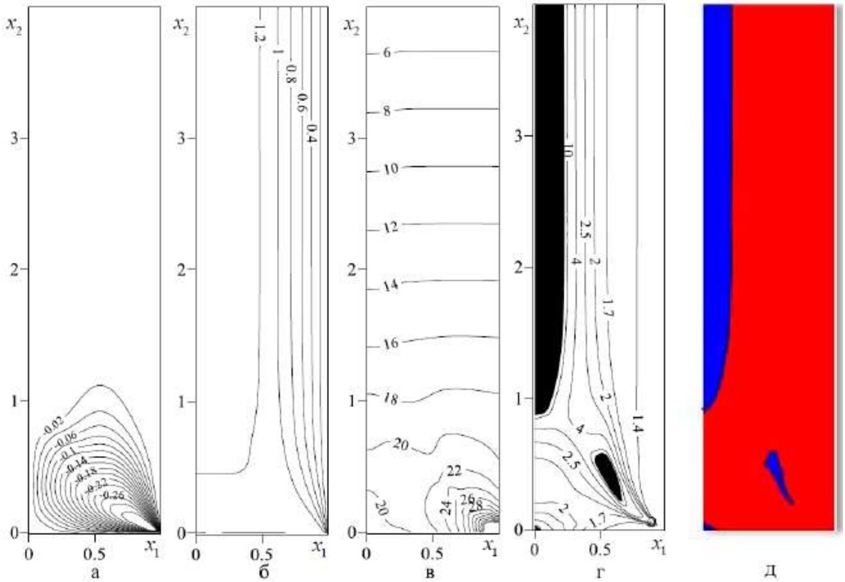


Рис. 3.16. Распределения скоростей *u* (*а*), *v* (*б*), давления *p* (*в*) и эффективной вязкости η (*г*), зон квазитвердого движения (*д*) при Re=0,01, Bn=2, α=0, $\varepsilon=10^{-2}$

На рис. 3.16, *г* черным цветом отмечена область квазитвердого движения. Наблюдается согласование результатов с данными [179], где местоположения квазитвердых ядер определяются с использованием вариационного подхода (см. рис. 3.16, *д*). Поток аналогично случаю течения ньютоновской и степенной жидкостей можно разделить на зоны гидродинамической стабилизации и одномерного течения. Влияние определяющих параметров на размеры зоны стабилизации представлено в [180, 181].

Рисунок 3.17 демонстрирует влияние параметра регуляризации на профиль вязкости в зоне одномерного движения жидкости Балкли–Гершеля, кривая *5* – результат аналитического решения, описывающего одномерное течение в плоской щели (3.19). В области сдвигового течения профили вязкости практически не отличаются, а в зоне квазитвердого движения ее значения ограничены для регуляризированных моделей.

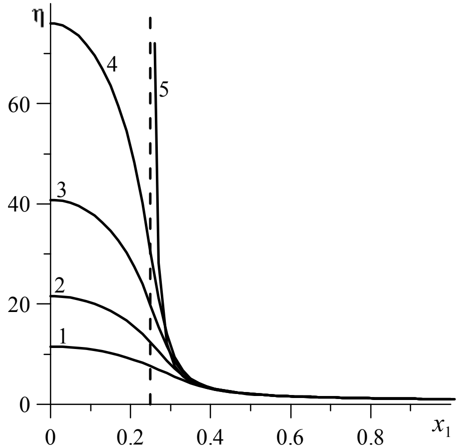


Рис. 3.17. Распределение вязкости в зоне одномерного течения: Bn=1, m=0,8:
1–4 – ε=0,1Bn, 0,05Bn, 0,025Bn, 0,0125Bn; *5* – аналитическое решение;
пунктирная линия – граница зоны квазитвердого движения

В табл. 3.6 представлены значения скорости на линии симметрии v_0, перепада $\delta p'$ и ширины зоны квазитвердого движения h' в области одномерного течения, вычисленные при различных значениях параметра регуляризации и относительные ошибки E_v, $E_{\delta p}$ и E_h.

Таблица 3.6

Зависимость ошибок от ε (Re = 0,01, m = 0,8, Bn = 1)

Модель	ε	0.1Bn	0.05Bn	0.025Bn	0.0125Bn
Simple [165, 167]	v_0/E_v	1,3125/6,08	1,2853/3,88	1,2659/2,31	1,2527/1,24
	$\delta p'/E_{\delta p}$	–4,9788/6,25	–5,1143/3,70	–5,1822/2,42	–5,2094/1,91
	h'/E_h	0,4017/6,66	0,3987/5,87	0,3857/2,42	0,3833/1,78
Bercovier-Engelman [164]	v_0/E_v	1,2768/3,19	1,2571/3,70	1,2457/0,68	1,2389/0,13
	$\delta p'/E_{\delta p}$	–5,2515/1,12	–5,2829/0,52	–5,2939/0,32	–5,2958/0,28
	h'/E_h	0,3800/0,90	0,3772/0,16	0,3753/0,35	0,3734/0,85
Papanasta-siou [166]	v_0/E_v	1,2794/3,40	1,2586/1,72	1,2464/0,73	1,2393/0,16
	$\delta p'/E_{\delta p}$	–5,2564/1,02	–5,2816/0,55	–5,2875/0,44	–5,2855/0,47
	h'/E_h	0,3801/0,93	0,3776/0,27	0,3753/0,35	0,3701/1,73

Аналитические значения характеристик течения, соответствующие установившемуся течению в бесконечном канале с единичным расходом, определяются по формулам (3.17), (3.19), (3.20) и равны $v(0)$ = 1,2373

$\delta p = -5{,}3107$, $h = 0{,}3766$ для значений определяющих параметров Bn = 2, m = 0,8. Для всех моделей с уменьшением параметра регуляризации наблюдается уменьшение ошибки по скорости и перепаду давления. Однако ошибка определения границы зоны квазитвердого движения, начиная с некоторого значения ε, увеличивается. Во всех дальнейших расчетах использовалась следующая зависимость для определения значения параметра регуляризации: ε = 0,025Bn.

Для проверки аппроксимационной сходимости вычислительного алгоритма проведена серия расчетов на последовательности квадратных сеток в случае Re = 0,01, m = 0,8, Bn = 2. Результаты расчетов, представленные в табл. 3.7, демонстрируют сходимость. Все дальнейшие расчеты проводились на квадратной сетке с шагом 1/40.

Таблица 3.7

Зависимость ошибок от шага сетки

Δ	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160
v_0/E_v	1,2416/0,35	1,2444/0,57	1,2457/0,68	1,2461/0,71	1,2462/0,72
$\delta p'/E_{\delta p}$	–5,3776/1,26	–5,3125/0,03	–5,2939/0,32	–5,2886/0,42	–5,2912/0,37
h'/E_h	0,3392/9,93	0,3640/3,35	0,3753/0,35	0,3777/0,29	0,3811/1,19

3.4.4. Заполнение плоского канала / круглой трубы ньютоновской жидкостью

Распределения характеристик течения определяются значениями параметров Re и W. Последовательность форм свободной поверхности с шагом по времени 0,1 представлена на рис. 3.18. С течением времени первоначально плоская свободная поверхность деформируется, принимая выпуклую установившеюся форму, и перемещается вдоль канала со среднерасходной скоростью. Видно, что установившаяся форма поверхности с ростом значения параметра W, т.е. с ростом влияния гравитационных сил, становится более пологой. Динамический краевой угол во всех случаях формируется около 180°.

Для контроля закона сохранения массы на каждом временном шаге вычисляются глобальная и локальная ошибки

$$\varepsilon_1 = \frac{\Omega(t) - \Omega(0) - Q\,t}{Q\,t} \cdot 100\%,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Omega(t) - \Omega(t - \Delta t) - Q\,\Delta t}{Q\,\Delta t} \cdot 100\%,$$

значения которых для различных параметров представлены на рис. 3.19. Здесь $\Omega(t)$ – объем жидкости в канале / трубе в момент времени t, Q – объемный расход жидкости через входное сечение.

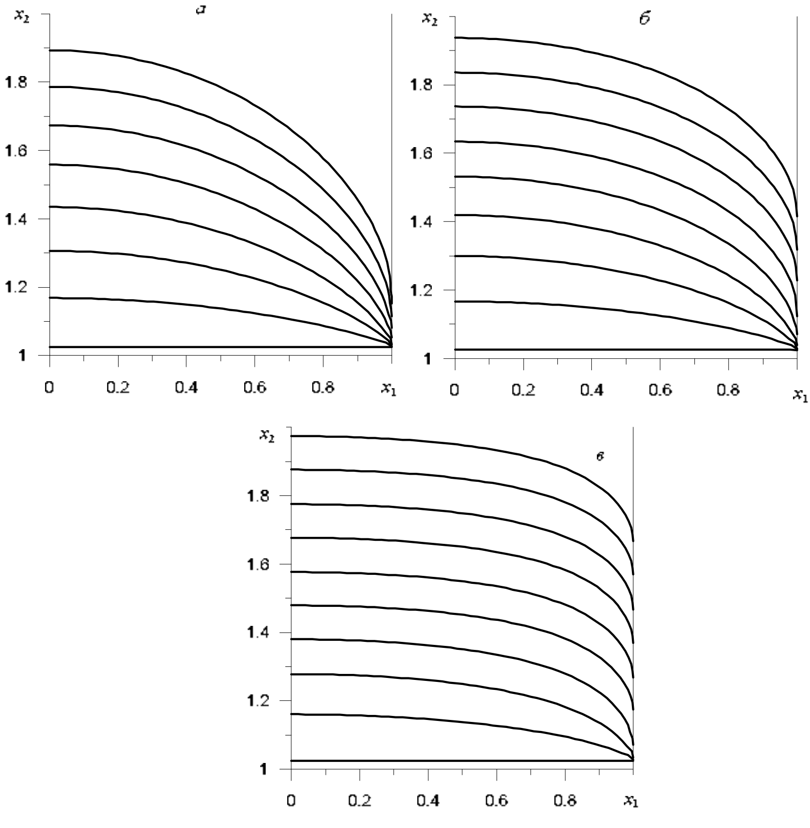


Рис. 3.18. Последовательность форм свободной поверхности с интервалом времени 0,1 при Re = 0,01, α = 0: *а* – W = 0, *б* – W = 20, *в* – W = 50

Таким образом, локальная ошибка определяет разницу в расходах через свободную поверхность и входное сечение за один шаг по времени, глобальная ошибка – разницу в расходах через начальную форму свободной границы и входное сечение за время t. Ошибки достигают максимальных величин на начальном этапе, а после установления формы они тоже устанавливаются и их абсолютное значение не превышает полпроцента.

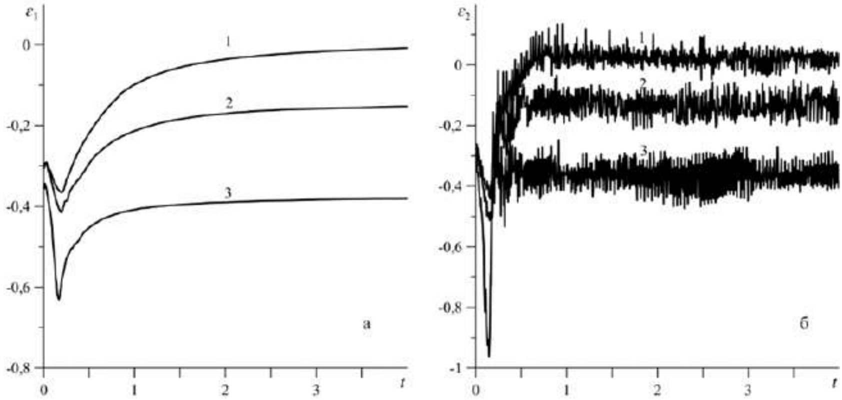


Рис. 3.19. Поведение глобальной (*а*) и локальной (*б*) ошибок с течением времени (Re=0,01, α=0: *1* – W=0, *2* – W=10, *3* – W=50)

Зависимость характеристики χ и продольной скорости V_0 точки свободной поверхности, лежащей на линии симметрии, от времени при малых значениях чисел Рейнольдса представлена на рис. 3.20. В начальный момент времени свободная поверхность имеет плоскую форму, что соответствует $\chi = 0$. С течением времени величина χ увеличивается и выходит на установившееся значение. Скорость V_0 уменьшается со значения 1,5 до установившегося значения 1. При этом время выхода на установившееся значение уменьшается с ростом W. Немонотонное поведение на начальном этапе связано с кинематикой маркеров вблизи линии трехфазного контакта.

На рис. 3.21 демонстрируется сравнение результатов расчета с экспериментальными данными формирования формы свободной поверхности для заполнения круглой трубы ньютоновской жидкостью, представленными в [100]. Кривые на рис. 3.21 – результаты расчетов, экспериментальные данные изображены дискретными значками. Изменение χ в зависимости от местоположения точки *B* на оси симметрии (см. рис. 3.3) показано на рис. 3.21, *а*. Зависимость χ от местоположения точки трехфазного контакта *C* демонстрируется на рис. 3.21, *б*.

Представленные на рисунках результаты позволяют понять механизм установления фронта потока. В момент времени $t = 0$ координаты x_2 точек *B*, *C* совпадают и полагаются равными нулю. В начальный период времени, пока формируется выпуклость свободной поверхности, точка контакта *C* практически остается неподвижной и начинает двигаться, когда фронт потока почти полностью сформировался. Следует отметить хорошее согласование численных и экспериментальных данных в обоих представлениях.

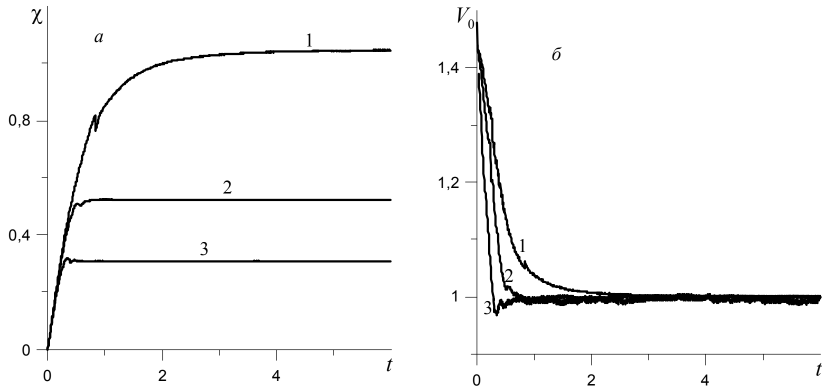
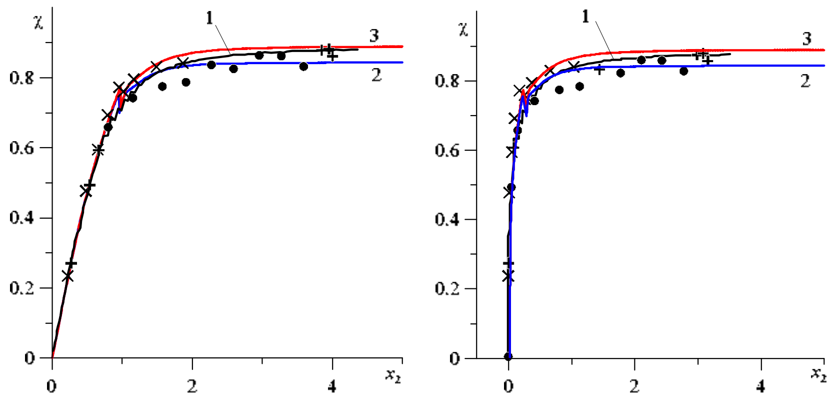


Рис. 3.20. Изменение χ и скорости V_0 с течением времени при Re = 0,01, α = 0:
1 – W = 0, *2* – W = 10, *3* – W = 50



а *б*

Рис. 3.21. Формирование фронта свободной поверхности вдоль трубы на оси симметрии (*а*) и в точке трехфазного контакта (*б*):
1 – Re << 1 [100]; *2* – Re = $0{,}075 \cdot 10^{-4}$, W = 0,575; *3* – Re = $0{,}16 \cdot 10^{-4}$, W = 0,25;
– Re = $0{,}9 \cdot 10^{-4}$, W = 0,5; – Re = $0{,}16 \cdot 10^{-4}$, W = 0,25; – Re = $0{,}075 \cdot 10^{-4}$, W = 0,575

Распределения характеристик потока после установления формы свободной поверхности представлены на рис. 3.22 и 3.23. Данные в интервале от –1 до 0 по координате x_1 соответствуют плоскому каналу, от 0 до 1 – круглой трубе. В области течения можно выделить две характерные зоны [97, 109, 182]. В зоне одномерного течения, которая расположена на некотором удалении от свободной границы, реализуется параболический профиль продольной скорости (3.12), характерный для установившегося течения. Градиент давления направлен параллельно стенкам канала и совпадает со значением, соответствующим установившемуся течению с единичным расходом:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = -(\alpha+3)(\alpha+1) - \mathrm{W}.$$

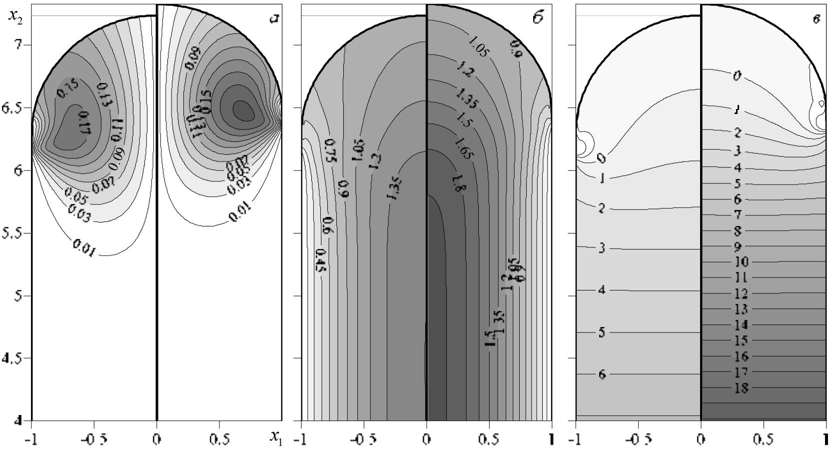


Рис. 3.22. Распределение поперечной (*а*) и продольной (*б*) скоростей и давления (*в*) при Re = 0,01, W = 0, *t* = 6,5

Вторая характерная зона двумерного течения расположена вблизи свободной поверхности. Торможение жидких частиц при подходе к фронту приводит к возникновению поперечной скорости и развороту вектора скорости к твердой стенке. С ростом гравитационных сил интенсивность поперечного движения в окрестности свободной поверхности усиливается, что приводит к уменьшению характеристики фронта границы раздела χ. При нулевой гравитации W = 0 максимум компоненты скорости *u* расположен на некотором удалении от поверхности, при W = 50 максимум локализован на фронте границы.

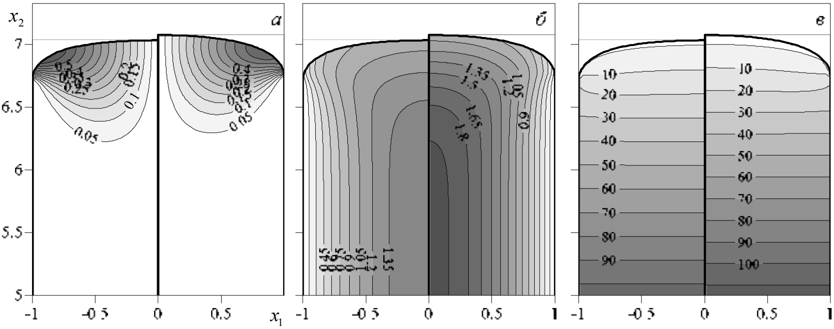


Рис. 3.23. Распределение поперечной (*а*) и продольной (*б*) скоростей и давления (*в*) при Re = 0,01, W = 50, t = 6

Дополнительное представление о кинематике течения дает распределение линий тока. На рис. 3.24 и 3.25 приведены линии тока в неподвижной системе координат (*а*) и в системе, движущейся вверх со среднерасходной скоростью (*б*). Линии тока, параллельные в одномерном потоке твердой стенке, изгибаются к ней в соответствии с характером течения в окрестности свободной границы. Анализ рис. 3.24, *б* и 3.25, *б* доказывает утверждение, что зону двумерного движения можно назвать областью фонтанирующего течения. На рис. 3.24, *в* и 3.25, *в* представлены результаты работы [97], полученные в плоском приближении, наблюдается качественное и количественное согласование результатов.

Таким образом, наблюдается качественное совпадение распределений кинематических и динамических характеристик в случае заполнения плоского канала и круглой трубы.

На рис. 3.26. показаны распределения составляющих вектора скорости вдоль канала в момент времени t = 4,9. Характер изменения скоростей подтверждает разделение потока на зону двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерного течения вдали от нее. Увеличение параметра W приводит к росту поперечной скорости в зоне двумерного течения, а ее размеры при этом уменьшаются. Более пологим формам свободной поверхности соответствует более интенсивное поперечное движение в зоне фонтанирующего течения.

Распределения компонент вектора скорости на свободной поверхности демонстрируются на рис. 3.27. С ростом гравитационных сил наблюдается увеличение значений поперечной скорости, а профиль продольной скорости становится более наполненным в окрестности стенки, что соответствует более пологим формам свободной поверхности.

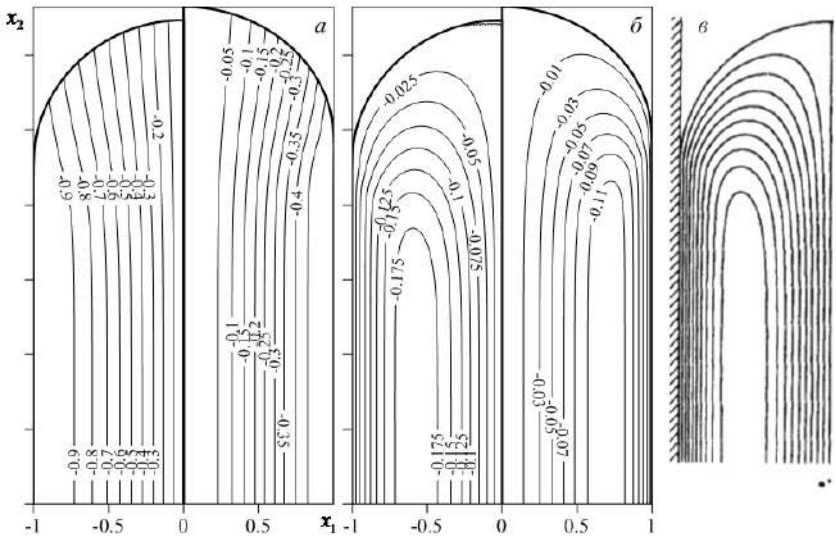


Рис. 3.24. Линии тока при Re = 0,01, W = 0, t = 7,5

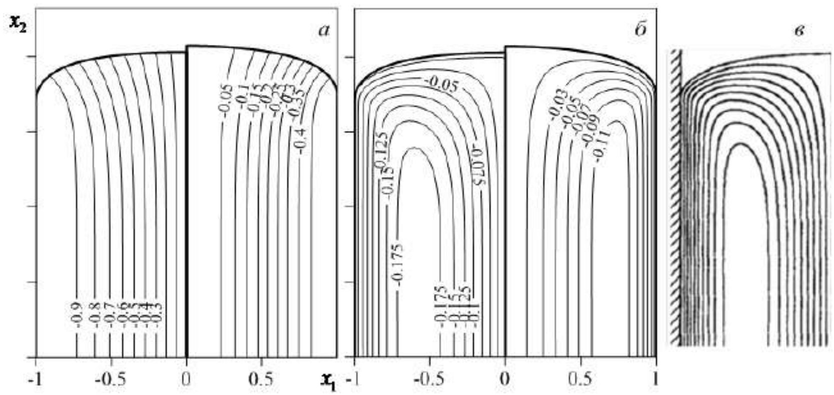
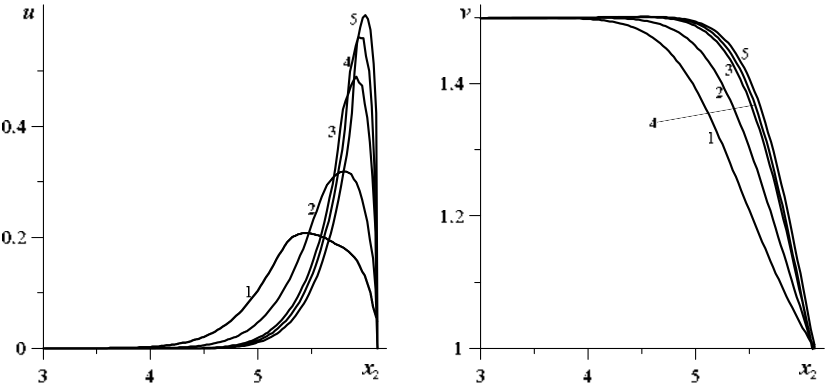


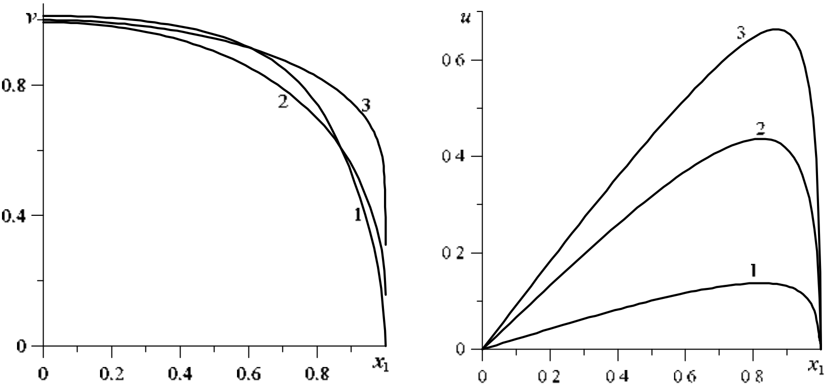
Рис. 3.25. Линии тока при Re = 0,01, W = 50, t = 11

Значение скорости v на твердой стенке определяется из условия отсутствия касательных напряжений в соответствии с используемым механизмом движения контактной линии (способ 4). Видно, что при W = 0 ЛТК перемещается только за счет механизма накатывания, так как скорость на твердой стенке равна нулю.



а *б*

Рис. 3.26. Распределение максимальной поперечной скорости в сечениях x_2 = const (*а*) и изменение продольной скорости на оси вдоль канала (*б*) в момент времени t = 4,9 при Re = 0,01, α = 0: *1–5* – W = 0, 2, 10, 20, 30



а *б*

Рис. 3.27. Распределение компонент вектора скорости на свободной поверхности при Re = 0,01, α = 0: *а* – W = 0; *б* – W=20; *в* – W=50

С ростом W начинает проявляться механизм скольжения, а накатывание уменьшается. Это можно объяснить следующим образом. Для более наполненных форм границы в окрестности контактной линии (рис. 3.28, кривая *1*) механизм накатывания обеспечивает скорость движения ЛТК

(2.27), равную среднерасходной. Более пологой форме свободной поверхности (рис. 3.28, кривая *2*) согласно предложенному способу движения соответствует меньшая скорость накатывания. Однако в этом случае условие отсутствия касательного напряжения на стенке генерирует ненулевую касательную скорость. В результате суммарная скорость движения ЛТК равна среднерасходной скорости течения, обеспечивая установление формы свободной границы.

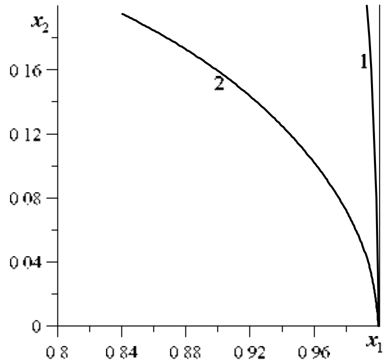


Рис. 3.28. Установившиеся формы свободной поверхности в окрестности контактной линии при Re = 0,01, α = 0; *1* – W = 0, *2* – W = 50

В качестве характеристики свободной границы рассматриваемого течения используется параметр $\chi = \Delta x_2 / L$ (см. рис. 3.3). Зависимости χ от W для плоского и осесимметричного случаев представлены на рис. 3.29. Полученные результаты (сплошные линии) сравниваются с данными работы [43] (пунктирные линии). В [43] методом конечных элементов находится решение стационарной задачи в подвижной системе координат, движущейся со среднерасходной скоростью. Стационарная форма свободной границы находится методом последовательных приближений, начальное приближение представляется полуокружностью. В данной работе рассматривается нестационарное течение, а стационарные формы свободной поверхности получаются в результате установления по времени. Сопоставление зависимости χ(W) с данными [43] показывает хорошее согласование результатов и дает теоретическую основу используемого в работе [43] подхода для определения стационарной формы свободной границы. Наблюдается существенное влияние параметра W на величину χ в рассматриваемом диапазоне изменения W. Кривые, полученные в результате расчетов для плоского и осесимметричного случаев, достаточно точно аппроксимируются выражениями вида

$$\chi = (1{,}11+0{,}26W^{0{,}61})^{-1},$$
$$\chi = (1{,}24+0{,}21W^{0{,}61})^{-1}.$$

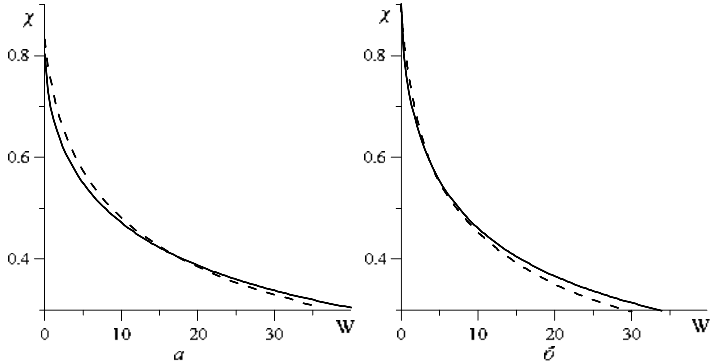


Рис. 3.29. Зависимость характеристики χ от W при Re = 0,01:
а – плоский канал, *б* – круглая труба

Для прогнозирования физико-механических характеристик изделия необходимо определять топограмму распределения порций жидкости в заполненном объеме, поступающих в канал в разные промежутки времени. Для решения задачи построения топограмм во входном сечении размещаются упорядоченные слои частиц-маркеров с заданным интервалом времени. Эти частицы перемещаются со скоростью жидкости и не обладают массой. В произвольный момент времени совокупность частиц образует в потоке некоторую реперную поверхность, которая разделяет две соседние порции жидкости, в предположении, что они не смешиваются. В конечном итоге местоположение всех реперных поверхностей в момент времени, соответствующий окончанию процесса заполнения, дает топограмму распределения выделенных порций жидкости.

Уравнения движения частиц имеют вид

$$\frac{d\, x_1\big|_q^p}{dt} = u_q^p, \ \frac{d\, x_2\big|_q^p}{dt} = v_q^p, \ p = 1,\ldots,M_q, \ q = 1,\ldots,M \ ,$$

где u, v – составляющие скорости в соответствующей системе координат, p – номер частицы в репере, q – номер репера, M_q – число частиц в q-м репере, M – количество реперов. Координаты частиц в потоке определяются численным интегрированием выписанной системы.

Сравнение с экспериментальными данными [97] поведения одной реперной линии с течением времени при заполнении плоского канала представлено на рис. 3.30. В диапазоне изменения координаты x_1 от –1 до 0 приведены экспериментальные, а от 0 до 1 – расчетные данные.

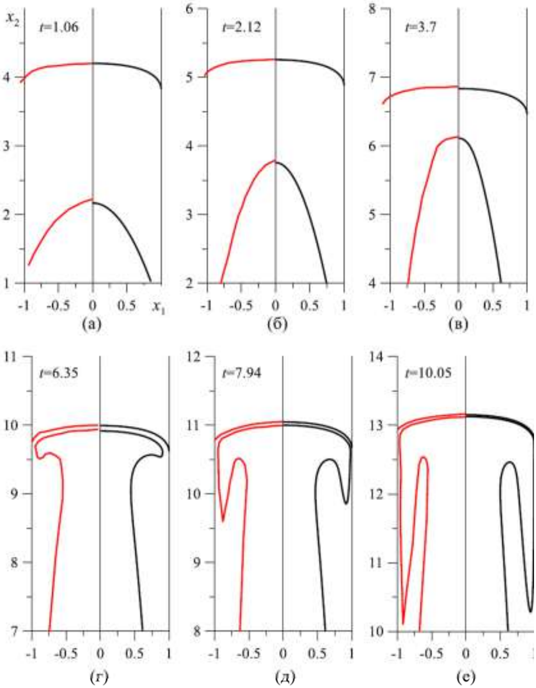


Рис. 3.30. Деформация репера при α = 0, Re = 0,0007, W = 32,33

На рис. 3.31–3.33 представлены типичные топограммы массораспределения порций жидкости, последовательно поступающих в плоский канал / круглую трубу, с интервалом времени одна безразмерная единица. Чередование темных и светлых полос разделяет соседние порции жидкости, а сами порции отмечены цифрами.

Качественное распределение порций жидкости для различных значений параметра W не отличается, однако имеются количественные отличия. Такой же вывод можно сделать, сравнивая рисунки для случаев заполнения плоского канала / круглой трубы. Эволюция реперных поверхностей с формированием грибовидных форм в окрестности свободной границы демонстрирует фонтанирующий характер течения в зоне двумерного движения жидкости. В зоне одномерного течения реперы деформируются в сдвиговом потоке.

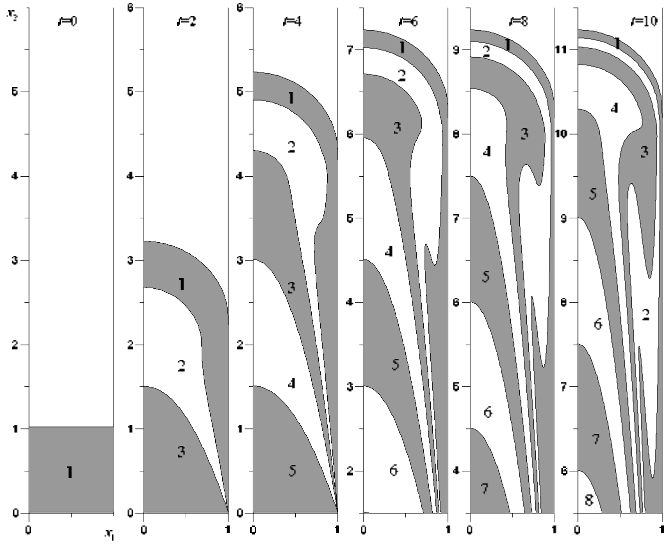


Рис. 3.31. Топограммы распределения порций жидкости при заполнении плоского канала: $\alpha = 0$, $\mathrm{Re} = 0{,}01$, $\mathrm{W} = 0$

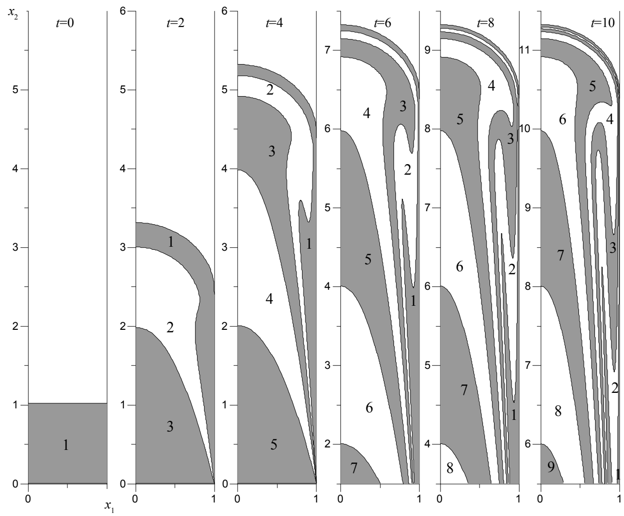


Рис. 3.32. Топограммы распределения порций жидкости при заполнении круглой трубы: $\alpha = 1$, $\mathrm{Re} = 0{,}01$, $\mathrm{W} = 0$

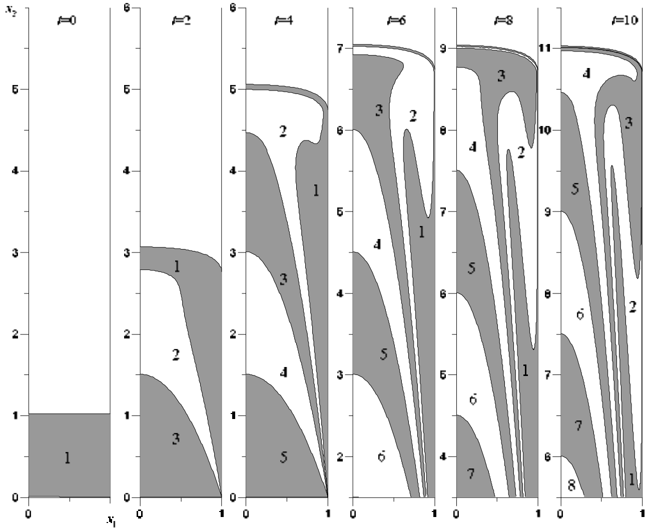


Рис. 3.33. Топограммы распределения порций жидкости для плоского канала:
$\alpha = 0$, Re = 0,01, W = 50

Влияние числа Рейнольдса на эволюцию свободной поверхности и характеристики χ представлено на рис. 3.34 и 3.35 соответственно. Видно, что с ростом Re процесс установления формы поверхности идет дольше, а установившаяся форма поверхности характеризуется небольшим уменьшением значения параметра χ.

Образования экстремума на кривых, представленных на рис. 3.35, при значениях числа Re больше 1 можно объяснить усилением инерционных эффектов.

Распределения составляющих вектора скорости на свободной поверхности после установления ее формы при различных числах Re представлены на рис. 3.36. Увеличение числа Рейнольдса, с одной стороны, приводит к падению значений поперечной скорости, что способствует росту параметра χ, с другой стороны, профиль продольной скорости становится более наполненным в окрестности стенки, что, в свою очередь, способствует уменьшению параметра χ. Поведение характеристики χ с ростом Re демонстрируется на рис. 3.37, *а*. Значение касательной скорости на линии трехфазного контакта с ростом Re увеличивается, что способствует формированию более пологих форм границы, аналогично случаю влияния параметра W, описанному выше.

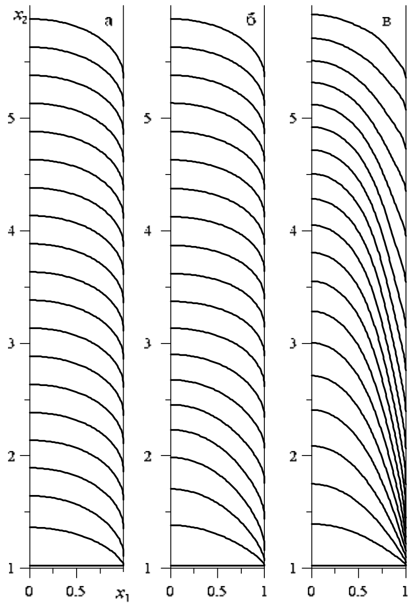
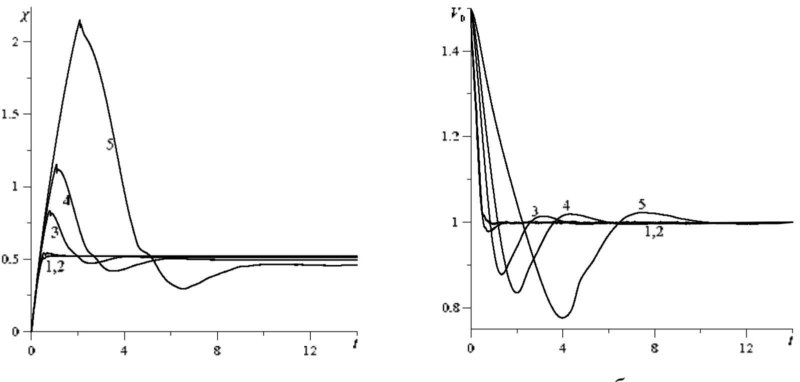


Рис. 3.34. Последовательность форм свободной поверхности с интервалом времени 0,25 при W = 10, α = 0: *а* – Re = 1, *б* – Re = 10, *в* – Re = 50



а *б*

Рис. 3.35. Изменение χ и скорости V_0 с течением времени при W = 10: *1* – Re = 0,01, *2* – Re = 1, *3* – Re = 10, *4* – Re = 20, *5* – Re = 50

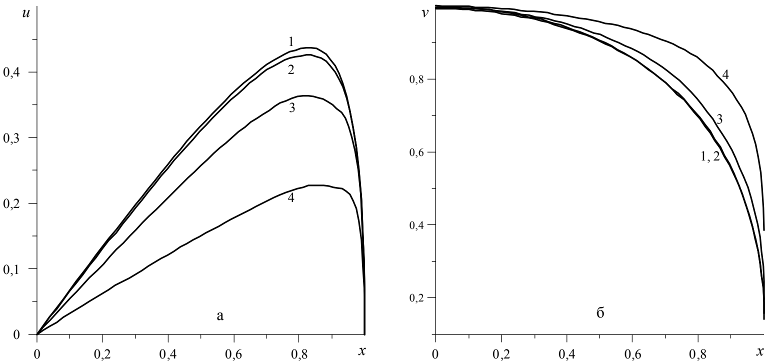


Рис. 3.36. Распределения компонент вектора скорости на свободной поверхности при W = 10: *1* – Re = 0,01, *2* – Re = 1, *3* – Re = 10, *4* – Re = 50

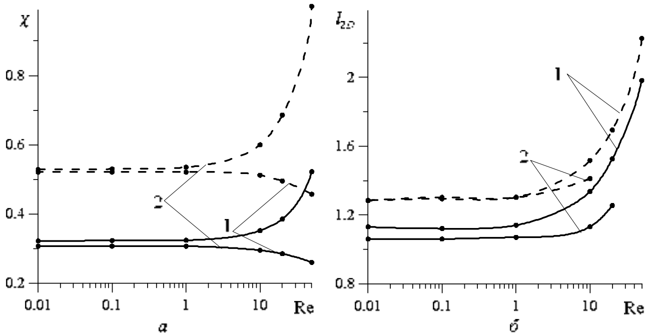


Рис. 3.37. Влияние Re на характеристики χ и l_{2D}:
1, 2 – α = 0, 1; пунктир – W = 10, сплошная линия – W = 50

Видно, что при значениях числа Re меньших 1 изменения формы свободной границы незначительны, течение можно считать ползущим.

Распределения составляющих вектора скорости, давления и линий тока для Re = 50 (рис. 3.38 и 3.39) подтверждают разделение потока на зоны одномерного и двумерного движений. В зоне двумерного течения сохраняется фонтанирующий характер течения, при этом размер зоны увеличивается с ростом Re (см. рис. 3.37, *б*). Предполагая, что зона двумерного течения начинается с сечения x_2 = const, в котором максимальное значение поперечной скорости достигает величины 0,001, длину области двумерного течения определяем как расстояние от вершины фронта потока до этого сечения. При малых значениях Re (меньше 1) l_{2D} практически не изменяется, увеличение Re приводит к ее росту.

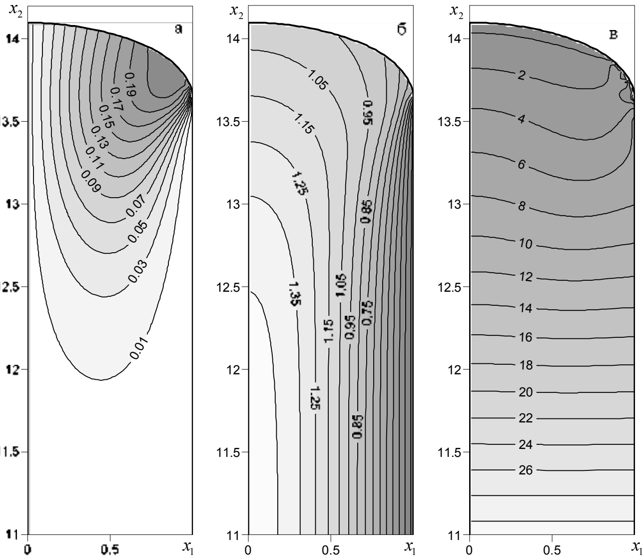


Рис. 3.38. Распределения компонент вектора скорости u (*а*), v (*б*) и давления p (*в*): $\alpha = 0$, Re = 50, W = 10, $t = 13$

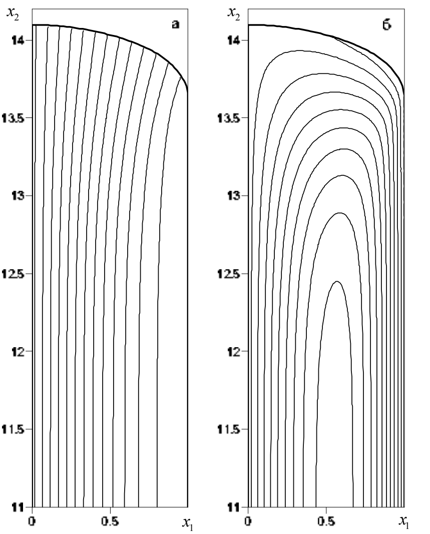


Рис. 3.39. Линии тока при Re = 50, W = 10, $t = 13$

Эволюция топограмм распределения порций жидкости при Re = 50 представлена на рис. 3.40.

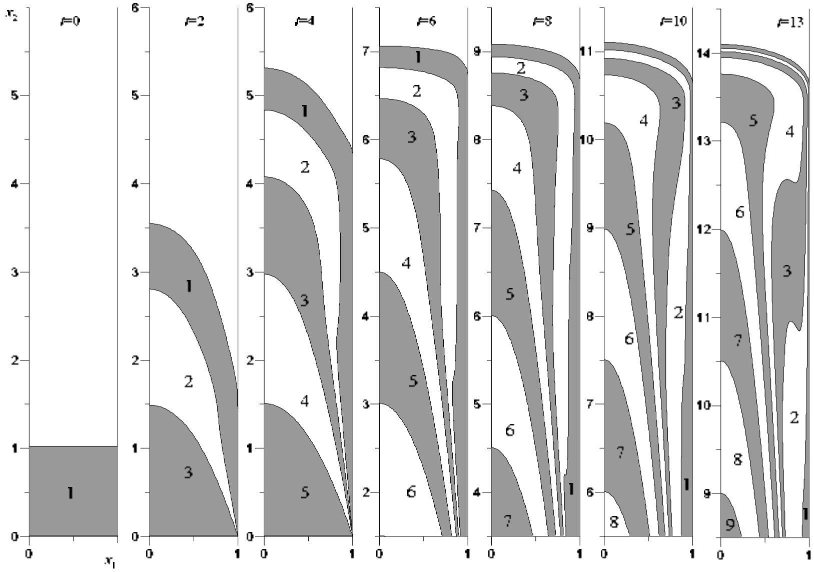


Рис. 3.40. Топограммы распределения порций жидкости при Re = 50, W = 10

После установления формы свободной поверхности (t = 13) кинематика течения совпадает со случаем малых значений Re, которая характеризуется образованием грибовидных форм реперных поверхностей.

3.4.5. Заполнение плоского канала / круглой трубы степенной жидкостью

Рассматривается заполнение плоского вертикального канала несжимаемой реологически сложной жидкостью, направление движения жидкости противоположно направлению силы тяжести.

Течения высоковязких полимерных жидкостей в процессе переработки часто реализуются с малыми скоростями, поэтому ограничимся рассмотрением результатов при малых числах Рейнольдса. Для параметрических расчетов величины m и W менялись в диапазонах $0{,}6 \leq m \leq 1{,}4$ и $0 \leq \mathrm{W} \leq 30$, что соответствует режимам переработки высокоэнергетических полимерных композиций [119]. Исследования ламинарного течения вязкой жидкости при заполнении канала / трубы показывают, что процесс характеризуется установившейся выпуклой формой свободной поверхности и наличием в потоке зон фонтанирующего течения и одномерного движения. В работах [42, 109] подтверждается факт установления формы свободной поверхности при заполнении канала неньютоновской жидкостью, однако отсутствуют результаты параметрических расчетов, которые бы демонстрировали зависимость χ от определяющих параметров.

Динамика изменения формы свободной границы с течением времени, распределения кинематических характеристик и вязкости для случая псевдопластичной и дилатантной жидкостей в момент времени t = 4 представлены на рис. 3.41.

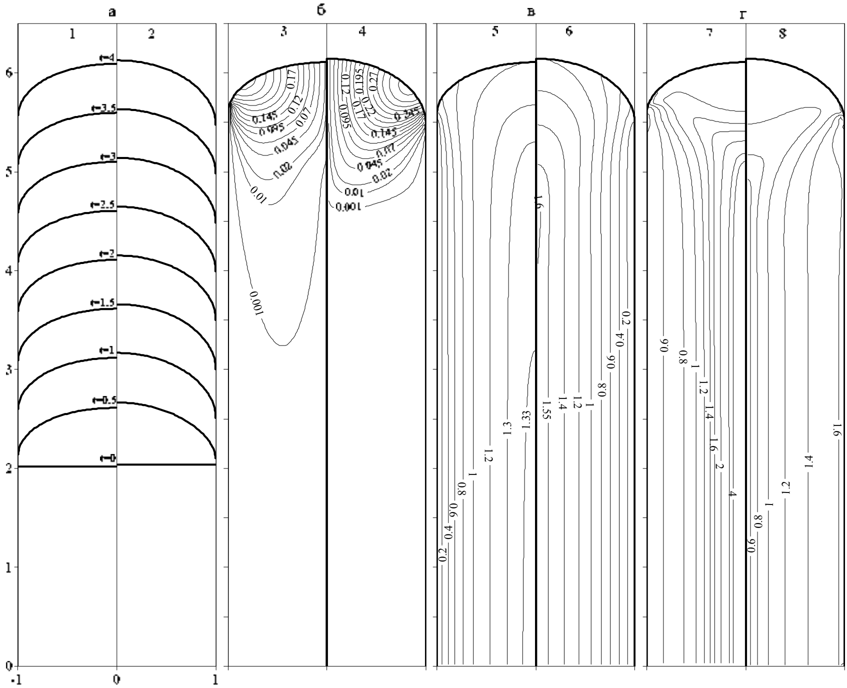


Рис. 3.41. Эволюция формы (*а*), изолинии *u* (*б*), *v* (*в*), η (*г*) при
Re = 0,1, W = 5, α = 0, *m* = 0,5 (*1, 3, 5, 7*), 1,5 (*2, 4, 6, 8*)

Качественно распределения составляющих вектора скорости в окрестности свободной поверхности не отличаются, но имеются слабые количественные изменения, что приводит к небольшому изменению формы свободной поверхности.

Эволюция характеристик свободной поверхности со временем для различных значений определяющих параметров показана на рис. 3.42. Кривая *6* на рис. 3.42, *а* показывает неустойчивое заполнение трубы при $m = 0{,}2$. Поведение функции, по-видимому, связано с особенностями степенного потока жидкости. Снижение m усиливает псевдопластические свойства жидкости и приводит к образованию пробковой зоны в центре потока и нестабильному поведению свободной поверхности.

Зависимости $\chi(m)$ для степенной жидкости при различных значениях W представлены на рис. 3.43. Для дилатантной жидкости ($m > 1$) в плоском канале при $W = 0$ наблюдается незначительное падение значения χ с ростом m, для псевдопластичной жидкости ($m < 1$) параметр свободной границы χ увеличивается с уменьшением m.

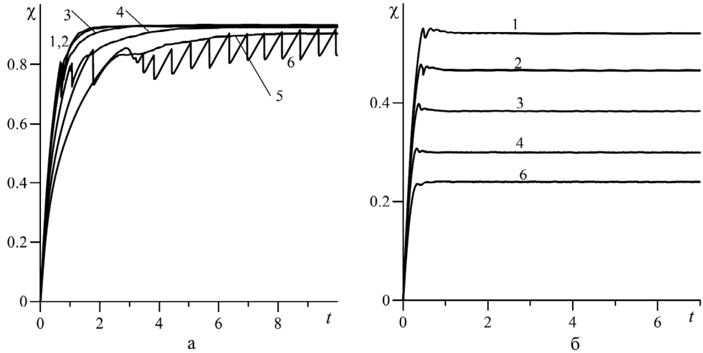


Рис. 3.42. Эволюция параметра χ во времени при $\alpha = 1$, $\mathrm{Re} = 0{,}1$:
а – $W = 0$, *б* – $W = 30$; *1, 2, 3, 4, 5, 6* – $m = 0{,}2$; 0,3; 0,5; 1; 1,5; 2

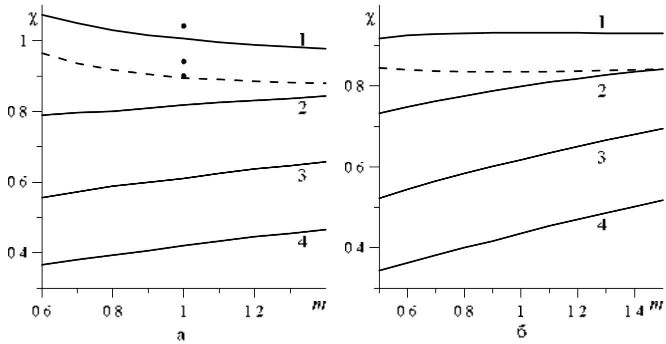


Рис. 3.43. Зависимости параметра χ от степени нелинейности m:
1, 2, 3, 4 – $W = 0$, 1, 5, 20; точки – данные других работ: *а* – $\alpha = 0$, *б* – $\alpha = 1$

Такой характер зависимости $\chi(m)$ объясняется кинематикой течения степенной жидкости в канале [42, 101]. Для установившегося течения псевдопластичной жидкости в канале профиль продольной скорости становится более плоским с уменьшением m [183]. Формирование фронта потока следует кинематике установившегося течения. Для более плоского профиля продольной скорости в центральной части формируется «поршневое» движение, интенсивность накатывания свободной границы на твердую стенку при этом падает, что способствует увеличению степени выпуклости. Для дилатантной жидкости в рассмотренном диапазоне изменения m кинематика течения меняется слабо, поэтому выпуклость свободной границы незначительно уменьшается в соответствии с изменением профиля продольной скорости в зоне одномерного течения. Точками на рис. 3.43 показаны значения параметра χ для ньютоновской жидкости, полученные различными авторами [42, 100, 184], пунктирной линией – результаты работы [144] при W = 0. Здесь также представлены зависимости $\chi(m)$ для различных значений W. Увеличение параметра W изменяет характер зависимости, обусловленный изменением m. Зависимость параметра χ от W при разных степенях нелинейности m демонстрируется на рис. 3.44.

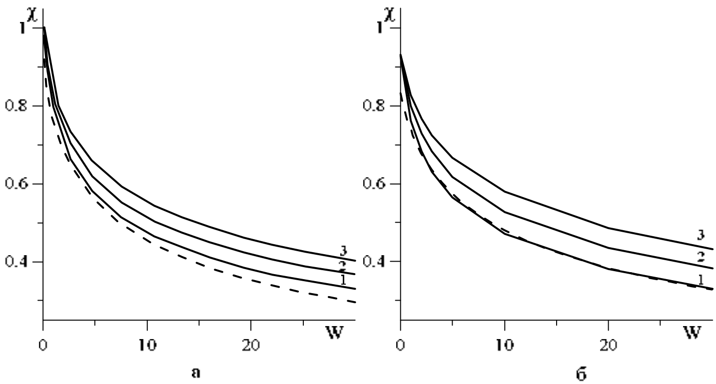


Рис. 3.44. Зависимости параметра χ от числа W при Re = 0,1:
1, 2, 3 – m = 0,7; 1; 1,3; пунктирная линия – результаты [144]; *а* – $\alpha = 0$, *б* – $\alpha = 1$

Полученные результаты для неньютоновского случая (кривая *2*) сравниваются с данными работы [144] (пунктирная линия). В [144] методом конечных элементов находится решение стационарной задачи в подвижной системе координат, движущейся со среднерасходной скоростью. Стационарная форма свободной границы находится методом последовательных приближений, начальное приближение представляется полуокружностью. В данной работе рассматривается нестационарное течение, а стационарные формы свободной границы получаются в результате установления по времени. Сопоставление полученной зависимости с данными [144] показывает удовлетворительное согласование результатов.

Эволюция формы свободной поверхности и распределение характеристик течения для двух значений числа W в момент времени $t = 4$ представлены на рис. 3.45.

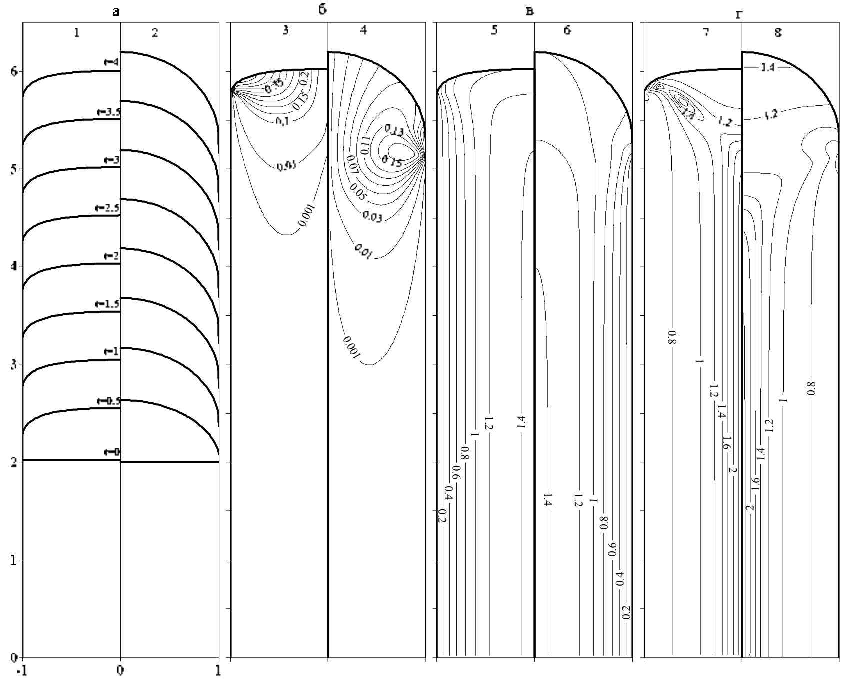


Рис. 3.45. Эволюция формы (*а*), изолинии u (*б*), v (*в*), η (*г*) при Re = 0,1, $m = 0{,}7$, $\alpha = 0$, W = 50 (*1, 3, 5, 7*), 0 (*2, 4, 6, 8*)

Интенсивность поперечного течения в окрестности свободной поверхности выше при больших значениях гравитационных сил, что приводит к более пологим формам границы. Наблюдаются качественные отличия распределений вязкости в области фонтанирующего течения, при W = 50 наблюдается область повышенных значений на некотором удалении от линии контакта.

На рис. 3.46 показаны распределения составляющих вектора скорости вдоль канала для различных значений m в момент времени, когда координата вершины фронта поверхности достигает координаты 5. Характер изменения скоростей подтверждает разделение потока на зону двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерного течения вдали от нее [39, 75, 185]. В области одномерного течения реализуется профиль продольной скорости, характерный для установившегося течения в плоской щели (3.13), а поперечная скорость равна нулю. Торможение жидких частиц при подходе к фронту течения приводит к возникновению поперечной скорости и развороту вектора скорости к твердой стенке, а вершина фронта независимо от реологических параметров движется со среднерасходной скоростью.

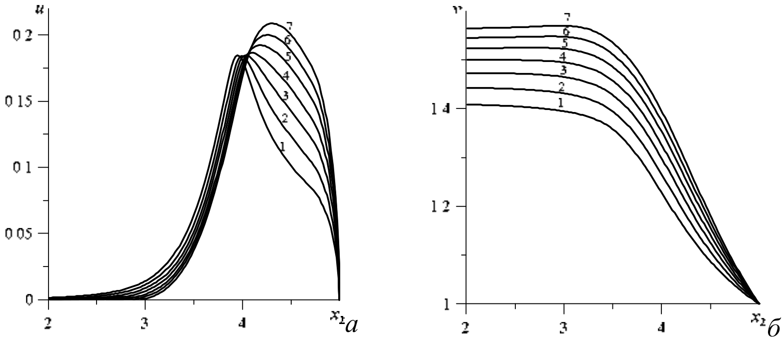


Рис. 3.46. Распределения максимальной поперечной (*а*) и продольной скоростей (*б*) течения вдоль канала при Re = 0,1, W = 0, α = 0: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* – m = 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1; 1,2; 1,3

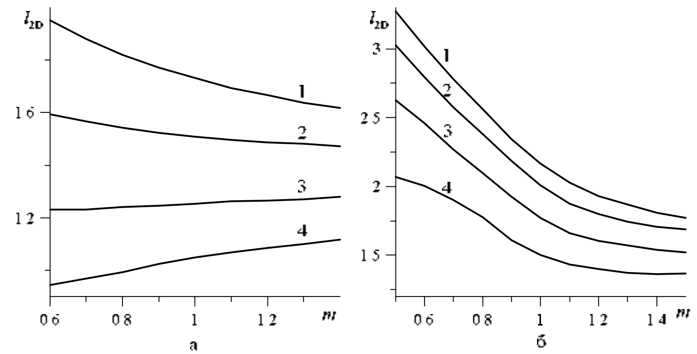


Рис. 3.47. Зависимости длины зоны двумерного течения от параметра нелинейности m при Re = 0,1: *1, 2, 3, 4* – W = 0, 1, 5, 20; *а* – α = 0, *б* – α = 1

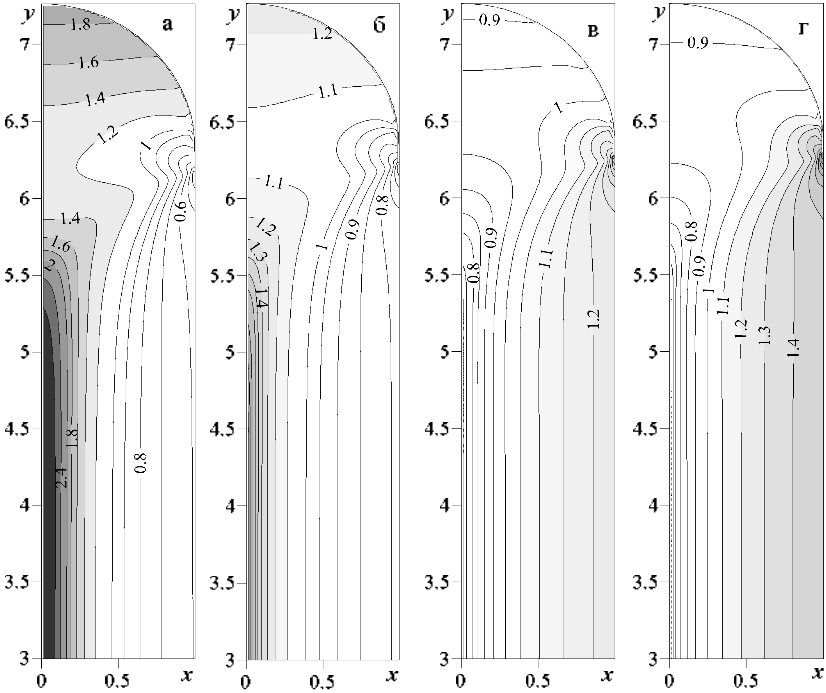


Рис. 3.48. Распределение вязкости течения при Re = 0,1, W = 0:
а – *m* = 0,6, *б* – *m* = 0,8, *в* – *m* = 1,2, *г* – *m* = 1,4

Анализируя рис. 3.41 и 3.45, можно сделать вывод, что реология жидкости (в диапазоне изменения от 0,5 до 1,5) не оказывает большого влияния на распределение кинематических характеристик и, как следствие, на размеры зоны двумерного течения. Увеличение гравитационных сил приводит к качественным изменениям картины течения и значимым изменениям зоны фонтанирующего течения. Зависимость безразмерной длины зоны двумерного течения l_{2D} от степени нелинейности m показана на рис. 3.47 для плоского канала и круглой трубы.

Распределения эффективной вязкости в части области течения, охватывающей зону фонтанирующего течения и частично одномерное течение, для псевдопластичной и дилатантной жидкостей показаны на рис. 3.48. В зоне одномерного течения изолинии вязкости параллельны стенке, характер распределения в целом соответствует кинематике течений.

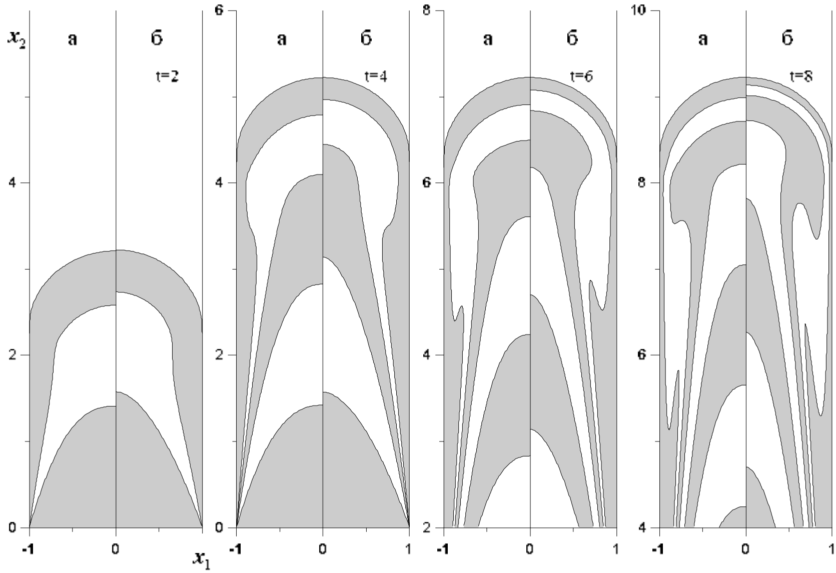


Рис. 3.49. Топограммы распределения порций жидкости при
Re = 0,1, W = 0 и m = 0,7 (*а*) и 1,3 (*б*)

Эволюция топограмм массораспределения порций псевдопластичной и дилатантной жидкостей показана на рис. 3.49. Представленные картины массораспределения демонстрируют эффект фонтанирующего движения. Изменения свойств жидкости сохраняют качественный характер распределений, однако приводят к существенным количественным различиям.

3.4.6. Заполнение плоского канала / круглой трубы вязкопластичной жидкостью

Рассматривается заполнение плоского вертикального канала несжимаемой жидкостью Балкли–Гершеля, при этом направление движения жидкости противоположно направлению силы тяжести.

Течения высоковязких полимерных жидкостей в процессе переработки часто реализуются с малыми скоростями, поэтому ограничимся рассмотрением результатов при малых числах Рейнольдса Re = 0,01. На рис. 3.50 показана эволюция характеристики формы свободной границы в процессе квазиустановления для различных значений определяющих параметров. Время установления растет с увеличением значения Bn при постоянном значении W и с уменьшением значения W при постоянном Bn.

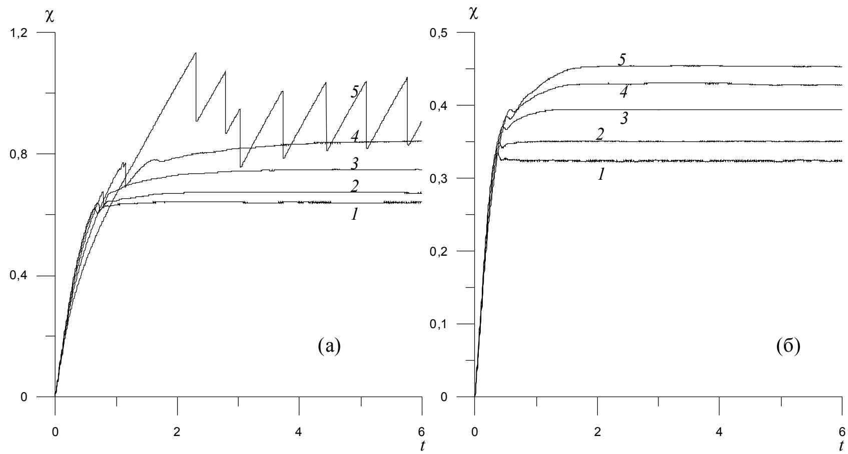


Рис. 3.50. Изменение параметра χ с течением времени при $m = 1$,
а – W = 5: *1–5* – Bn = 0,5; 1; 2; 4; 8; *б* – W=60: *1–5* – Bn = 1, 2, 4, 6, 8

Зависимости χ от различных определяющих параметров для жидкости Балкли–Гершеля представлены на рис. 3.51 для случая плоского канала. Кривые на рис. 3.51, *а* демонстрируют влияние параметра нелинейности в модели Балкли–Гершеля на зависимость χ(W). Представленные результаты согласуются с данными, полученными ранее по влиянию параметра нелинейности на зависимость χ(W) для степенной жидкости [43]. Характер влияния параметра пластичности Bn на зависимость χ(W) показан на рис. 3.51, *б*. Зависимости χ(Bn) при заданных значениях W представлены на рис. 3.51, *в*. Аналогичные зависимости для круглой трубы представлены на рис. 3.52.

В [43, 144] методом конечных элементов находится решение стационарной задачи в системе координат, движущейся со среднерасходной скоростью. Стационарная форма свободной границы находится методом последовательных приближений, начальное приближение представляется полуокружностью. В данной работе рассматривается нестационарное течение, а стационарные формы свободной границы формируются с течением времени. Сопоставление полученных зависимостей с данными [43, 144] показывает согласование результатов (рис. 3.51).

На рис. 3.53 показаны распределения составляющих вектора скорости вдоль канала в момент времени $t = 4{,}9$.

Характер изменения скоростей подтверждает разделение потока на зону двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерного течения вдали от нее. В области одномерного течения реализуется профиль продольной скорости, характерный для установившегося одномерного течения жидкости в плоской щели.

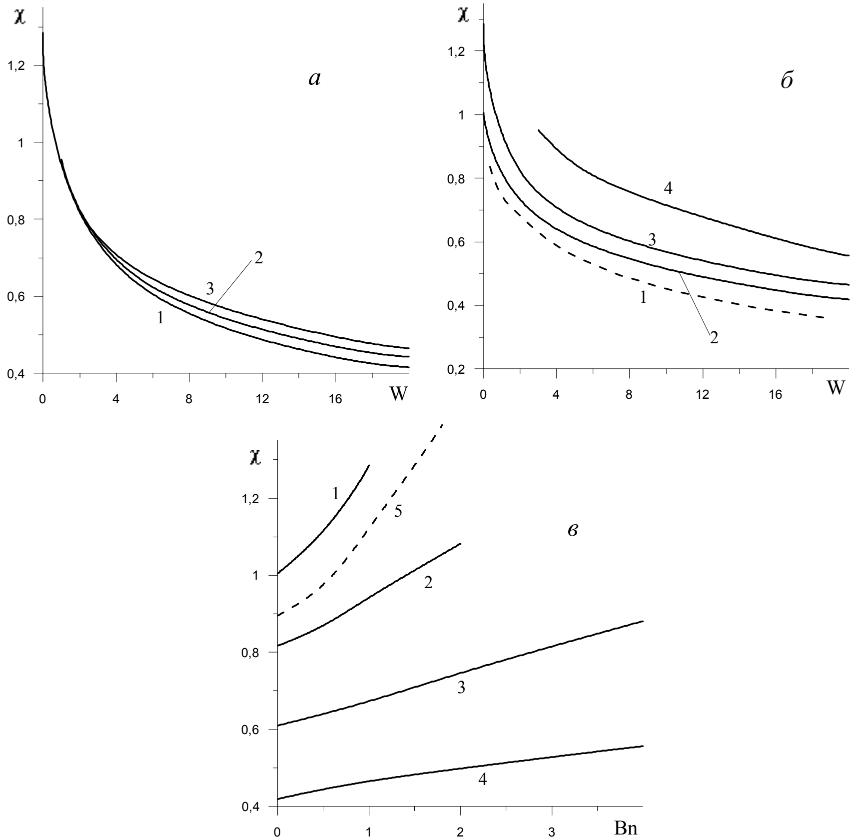


Рис. 3.51. Зависимость параметра χ от определяющих параметров при $\alpha = 0$,
а – Bn = 1: *1–3* – m = 0,6; 0,8; 1; *б* – m = 1: *1* – результаты [43],
Bn = 0; *2–4* – Bn = 0, 1, 4; *в* – m = 1:
1–4 – W = 0, 1, 5, 20; 5 – результаты [144], W=0

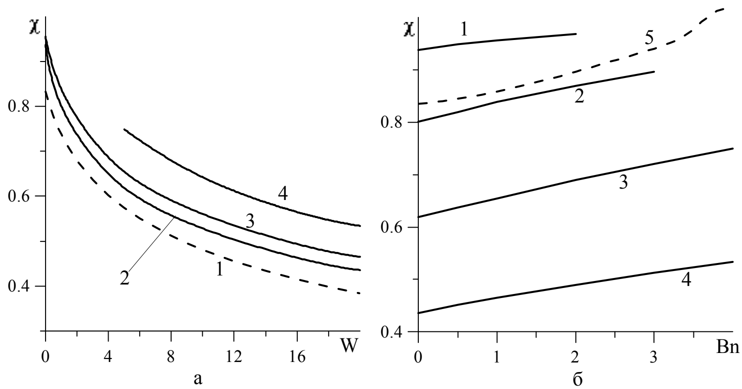


Рис. 3.52. Зависимость параметра χ от определяющих параметров при $\alpha = 1$,
а – $m = 1$: *1* – результаты [43], Bn = 0; *2–4* – Bn = 0, 1, 4;
б – $m = 1$: *1–4* – W = 0, 1, 5, 20; *5* – результаты [144], W=0

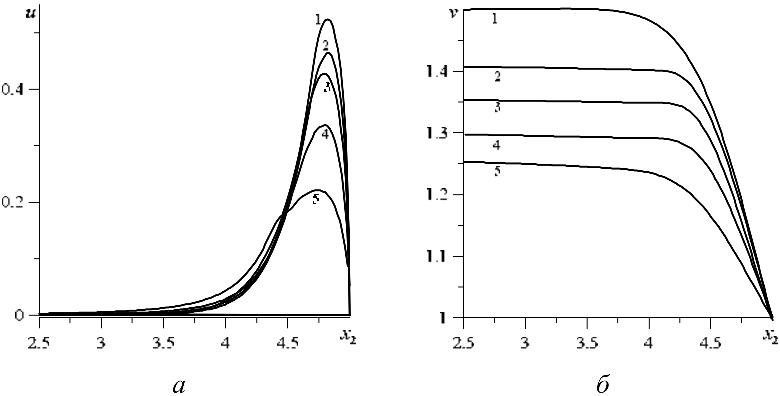


Рис. 3.53. Распределение максимальной поперечной (*а*) и продольной скоростей (*б*) вдоль канала в случае $m = 1$, W = 20, $\alpha = 0$: *1–5* – Bn = 0; 0,5; 1; 2; 4

Торможение жидких частиц при подходе к фронту течения приводит к возникновению поперечной скорости и развороту вектора скорости к твердой стенке. Предполагая, что зона двумерного течения начинается с сечения y = const, в котором максимальное значение поперечной скорости достигает величины 0,001, длину области двумерного течения определяем как расстояние от вершины фронта потока до этого сечения.

Зависимости безразмерной длины зоны двумерного течения от Bn при различных значениях W представлены на рис. 3.54. Наблюдается рост длины зоны двумерного течения с увеличением параметра пластичности. Изолинии составляющих вектора скорости, представленные на рис. 3.55, показывают детальную картину течения и демонстрируют влияние реологических параметров на поле вектора скорости.

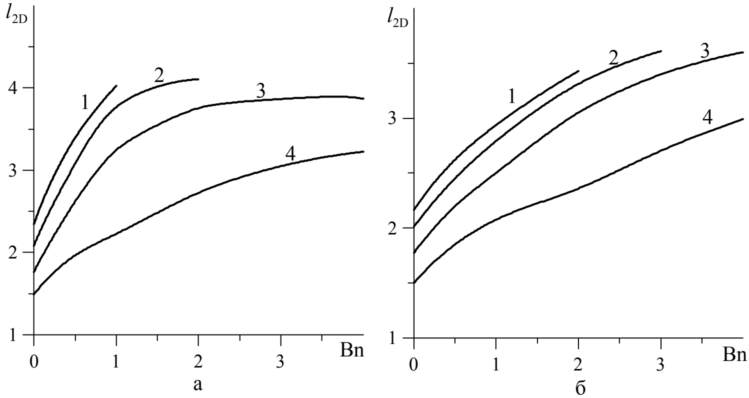


Рис. 3.54. Зависимость длины зоны двумерного течения в случае $m = 1$, $\alpha = 0$ (*а*) и $\alpha = 1$ (*б*): *1–4* – W = 0, 1, 5, 10

Характерной особенностью течения вязкопластичной жидкости является наличие квазитвердых ядер в потоке. В основу реологической модели таких сред положено представление о наличии у покоящейся жидкости пространственной структуры, достаточно жесткой, чтобы сопротивляться любому напряжению, меньшему τ_0. За этим пределом наступает полное мгновенное обратимое разрушение структуры, и среда течет как обычная ньютоновская жидкость. Когда действующие в жидкости напряжения сдвига становятся меньше τ_0, структура снова восстанавливается. В тех местах потока, где касательные напряжения ниже предела текучести, образуются «квазитвердые» ядра [134].

Типичные картины структуры потока при заполнении канала представлены на рис. 3.56, 3.57 как последовательности «кадров» с ростом значений Bn при фиксированных значениях W. Квазитвердые ядра выделены серым цветом, неокрашенные области показывают зоны вязкого течения. Представленные картины подтверждают разделение потока на зону двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерное течения вдали от нее.

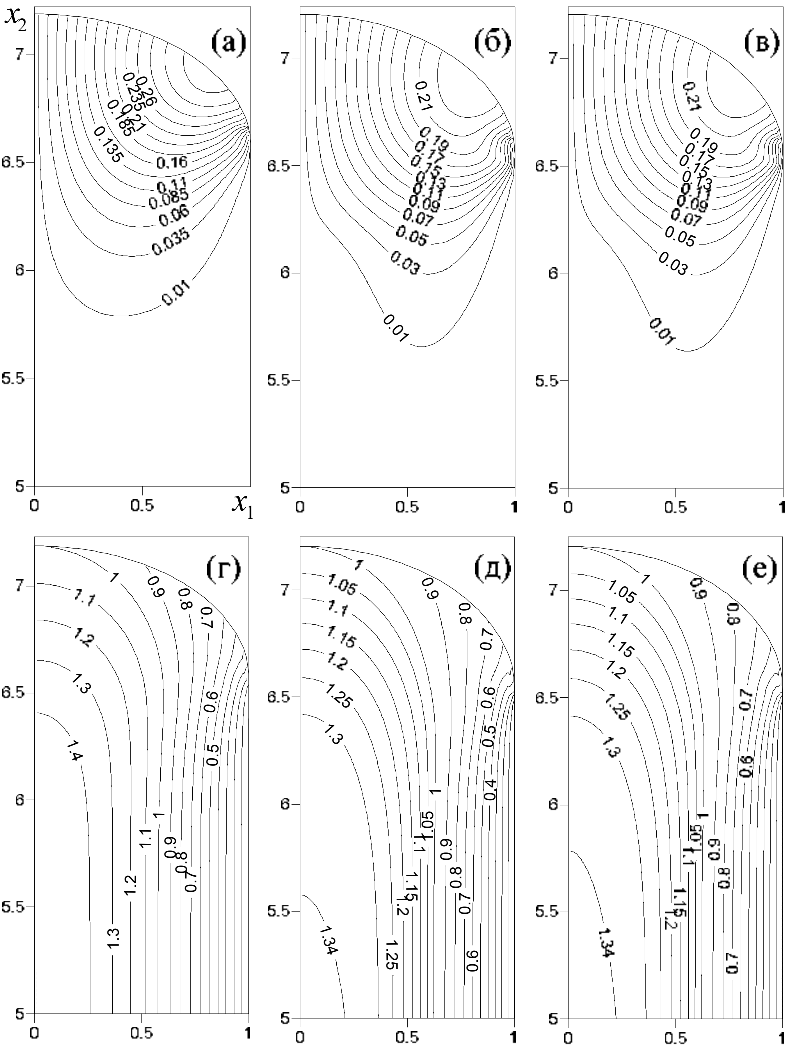
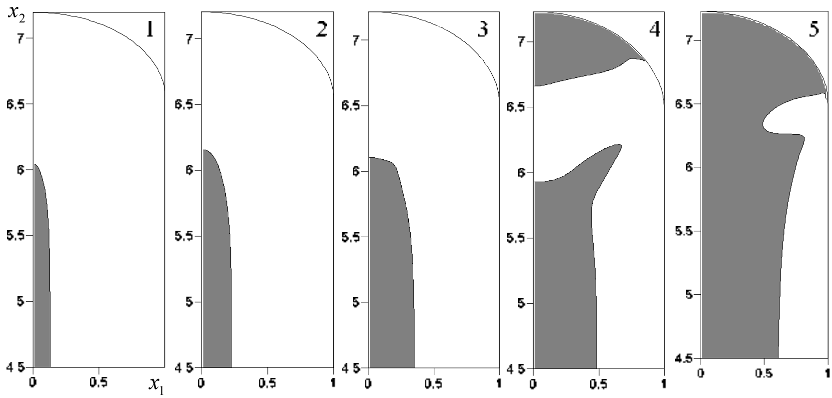
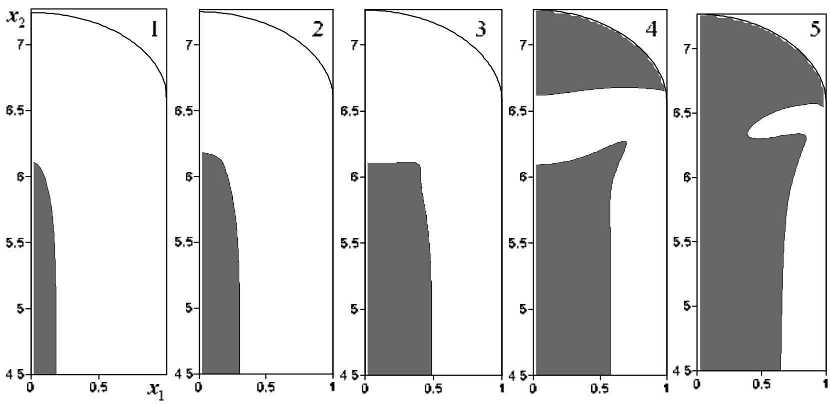


Рис. 3.55. Распределение поперечной (*а, б, в*) и продольной (*г, д, е*) компонент вектора скорости: а*, г* – Bn = 0, W = 5, m = 1; *б, д* – Bn = 1, W = 5, m = 1; *в, е* – Bn = 1, W = 5, m = 0,8



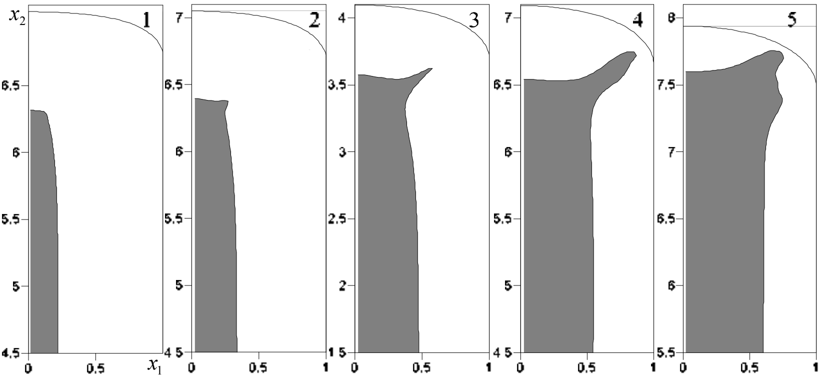
а



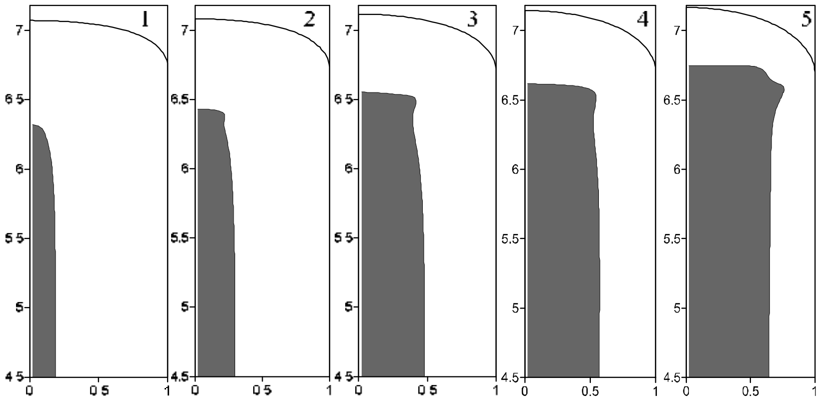
б

Рис. 3.56. Структура потока при W = 5:
а – α = 0, *1–5* – Bn = 0,5; 1; 2; 4; 8; *б* – α = 0, *1–5* – Bn=1, 2, 5, 8, 12

В области одномерного течения реализуется профиль продольной скорости, характерный для установившегося одномерного течения жидкости в плоской щели, в центральной части потока формируется квазитвердое ядро (3.19). Зависимость ширины зоны квазитвердого движения от Bn в области одномерного течения представлена на рис. 3.58. Расчетные данные хорошо согласуются с аналитической зависимостью для установившегося течения жидкости Шведова–Бингама между параллельными плоскостями. Количественное согласование данных демонстрируется в табл. 3.8.



а



б

Рис. 3.57. Структура потока при W = 60:
а – α = 0, *1–5* – Bn = 0,5; 1; 2; 4; 8; *б* – α = 0, *1–5* – Bn = 1, 2, 5, 8, 12

Среди представленных структур потока можно выделить случаи, характеризуемые определенным признаком. Это структура с одним квазитвердым ядром в центральной части потока и зоной вязкого течения в окрестности свободной границы (см., например, рис. 3.56, *1–3*). На рис. 3.56, *4* продемонстрирован поток с двумя квазитвердыми ядрами, в котором одно ядро образуется в центральной части на достаточном удалении от свободной границы, второе ядро формируется на свободной поверхности. Слияние этих ядер образует другую типичную структуру потока (см. рис. 3.56, *5*). Определенный набор значений параметров обуславливает формирование структуры с одним квазитвердым ядром с выходом на свободную поверхность и зоной вязкого течения в вершине потока (см. рис. 3.57, *5*).

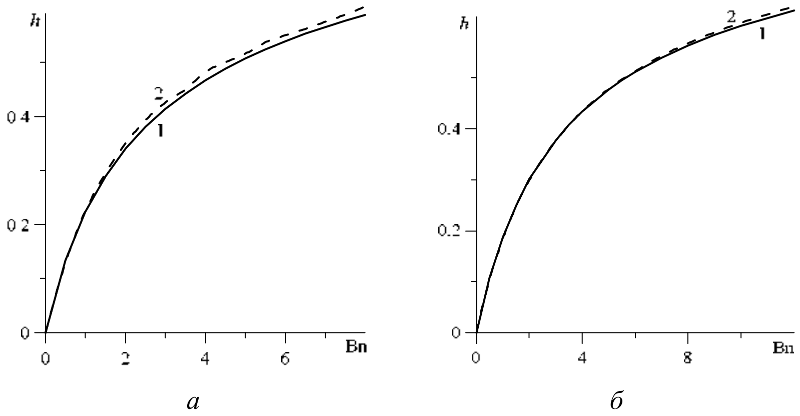


Рис. 3.58. Ширина ядра в области установившегося движения:
1 – аналитическая зависимость (3.17), 2 – расчетные данные; *а, б* – α = 0, 1

Таблица 3.8

Ширина зоны квазитвердого движения в зависимости от Bn

Bn	*h* (аналитика)	*h* (расчет)	Ошибка (%)
0,5	0,133	0,13	2,62
1	0,223	0,226	1,14
1,5	0,289	0,295	2,02
2	0,340	0,35	2,98
3	0,414	0,426	2,85
3,5	0,443	0,45	1,66
4	0,467	0,482	3,19
5	0,507	0,516	1,72
5,5	0,524	0,537	2,47
6	0,539	0,55	2,01
7	0,565	0,575	1,70
8	0,587	0,603	2,66

В [144] представлены структуры потока с одним и двумя ядрами. Рисунок 3.59 показывает сравнение результатов расчетов с данными [144]. В случае плоского канала наблюдается качественное и количественное согласование результатов. Для круглой трубы совпадают радиальные размеры ядер в области одномерного течения.

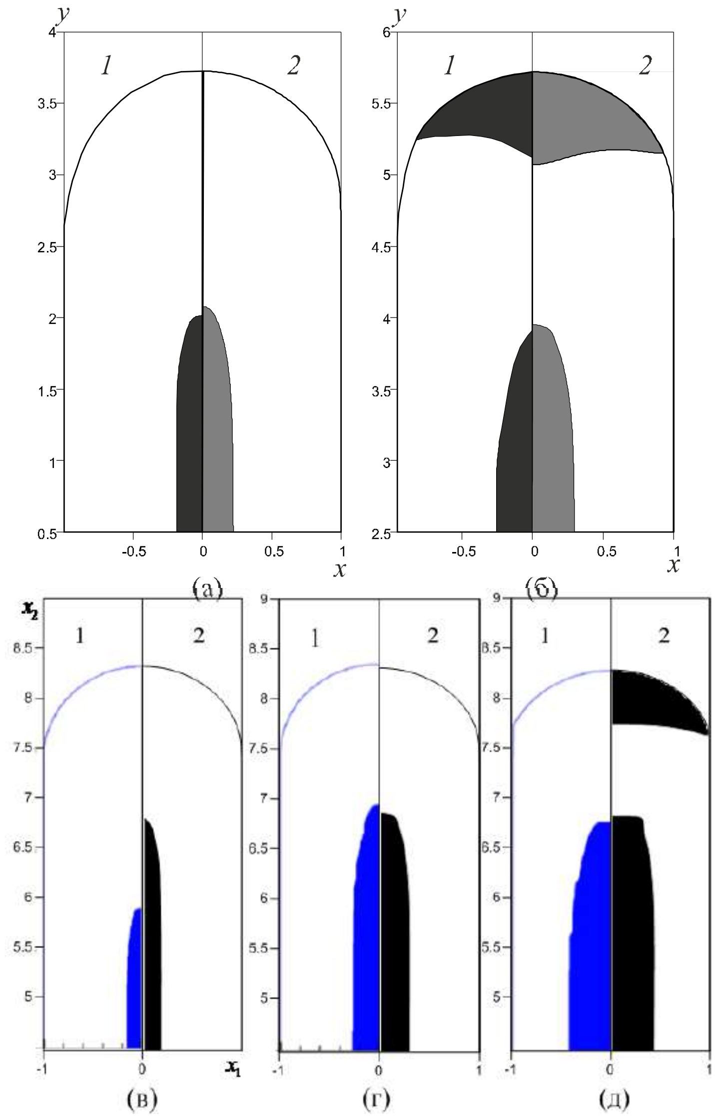


Рис. 3.59. Структура потока при W=0 (*1* – [144], *2* – результаты настоящей работы):
а – α = 0, Bn = 1; *б* – α = 0, Bn = 1,5; *в* – α = 1, Bn = 1; *г* – α = 1, Bn = 2; *д* – α = 1, Bn = 4

Все структуры потока на рис. 3.56, 3.57, за исключением случая на рис. 3.56, *5*, устанавливаются с течением времени, и характер установления формы свободной границы соответствует кривым на рис. 3.50. Структура потока на рис. 3.56, *5*, в которой квазитвердое ядро полностью захватывает свободную границу, приводит к нестабильному заполнению. Эволюция характеристики $\chi(t)$ в этом случае демонстрируется на рис. 3.50, кривая *5*. Характерной особенностью данной структуры является наличие квазитвердой «пробки», практически полностью перекрывающей сечение канала. Несовместимость «пробкового» режима течения с условиями прилипания на твердой стенке вне малой окрестности линии трехфазного контакта может являться причиной наблюдаемой нестабильности.

Обсуждаемые выше признаки структур потока непосредственно связаны с относительным влиянием гравитационных и вязких сил в потоке и наличием предела текучести, определяемым значениями чисел W и Bn или чисел W / Bn и Bn. Значение числа W / Bn характеризует относительный вклад силы тяжести и пластичности в формирование структуры потока.

Следуя методике представления результатов [186], изобразим топографию полученных структур потока. На рис. 3.60, *а* показана топограмма выделенных структур потоков, где идентификация случаев заполнения занимает определенные области.

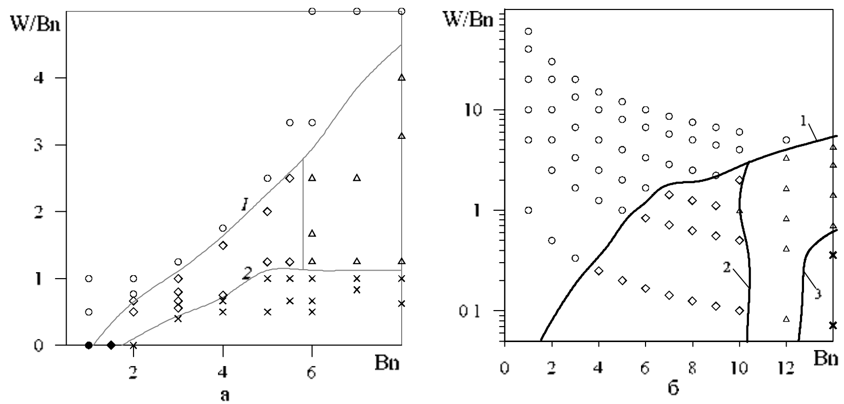


Рис. 3.60. Распределение структур потока: *а* – α = 0, *б* – α = 1; – одно ядро, – два ядра, – объединенное ядро, – неустойчивое заполнение

Область выше кривой *1* соответствует структуре потока с одним ядром, область, ограниченная линиями *1*, *2* при Bn ≤ 5,75, – структура потока с двумя ядрами. В области параметров между линиями *1*, *2* при Bn > 5,75 реализуется заполнение с объединенным ядром.

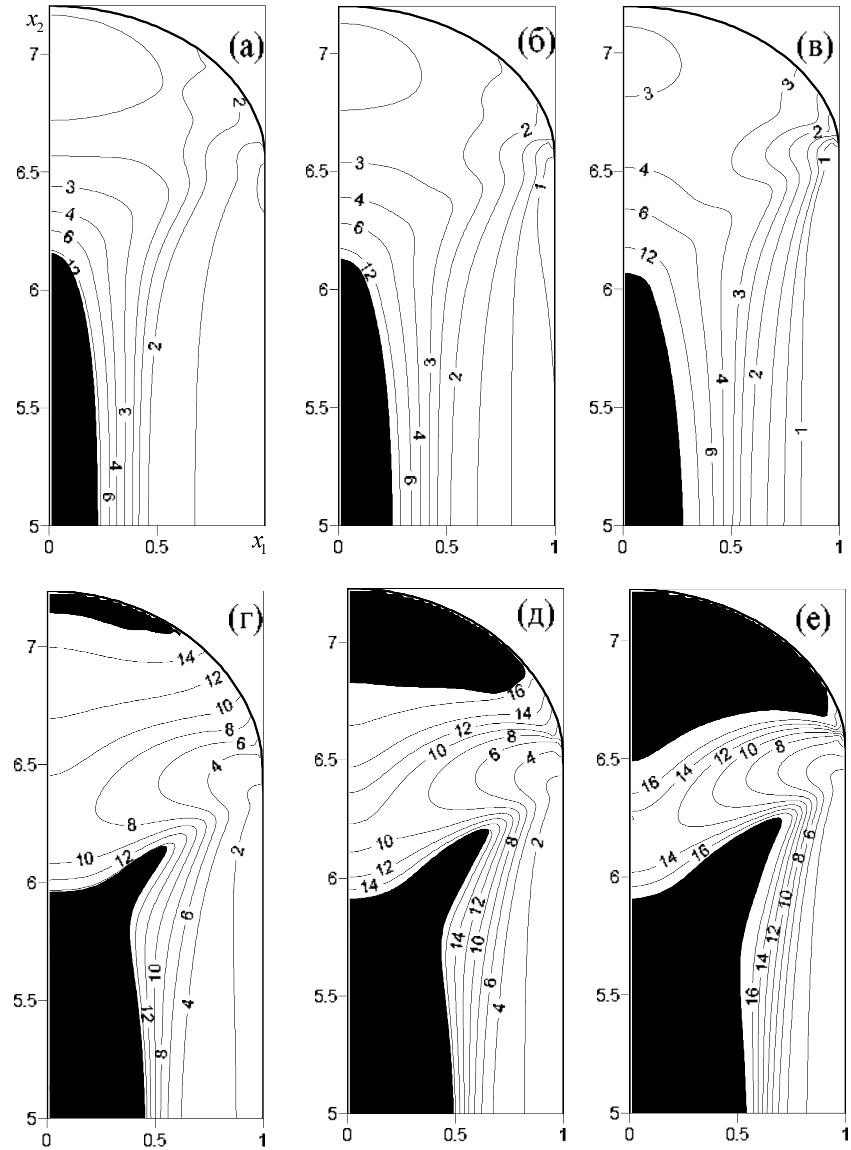


Рис. 3.61. Распределение вязкости:
а, б, в – Bn = 1, m = 1; 0,8; 0,6; *г, д, е* – Bn = 3,5, m = 1; 0,8; 0,6

Зона нестабильного заполнения определяется приблизительно следующим диапазоном изменения определяющих параметров: Bn > 5; W / Bn ≤ 1. Закрашенными значками показаны результаты [144]. Распределение структур потока в случае круглой трубы представлено на рис. 3.60, *б*.

На рис. 3.61 демонстрируется влияние параметра степени нелинейности модели Балкли–Гершеля на структуру течения при заполнении канала. Видно, что при Bn = 1 с уменьшением показателя *m* ширина квазитвердого ядра в окрестности линии симметрии растет с незначительным уменьшением его длины в направлении потока. При Bn = 3,5 наблюдается качественное изменение структуры потока, характеризуемое формированием квазитвердого ядра в окрестности свободной границы и изменением формы центрального ядра. Эффект влияния параметра пластичности на структуру течения усиливается с уменьшением *m*. Представленная эволюция структуры течения с изменением реологических параметров качественно согласуется с результатами работы [144].

Топограммы массораспределения порций жидкостей для различных значений Bn, представленные на рис. 3.62, демонстрируют влияние пластических свойств среды на картины массораспределения и как следствие на морфологию формуемого изделия [114].

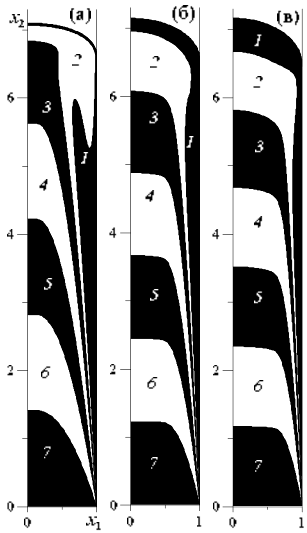


Рис. 3.62. Топограммы распределения порций жидкости при W = 5: (*а*, *б*, *в*) – Bn = 0,5; 4; 8

В результате проведенного исследования продемонстрировано разделение потока жидкости на зону двумерного течения в окрестности свободной границы и одномерное течение вдали от нее. Получены зависимости формы свободной поверхности от соотношения гравитационных и вязких сил в потоке и значений параметров реологической модели. Наблюдается рост выпуклости свободной границы с уменьшением показателя нелинейности и с увеличением параметра пластичности.

Зависимости безразмерной длины зоны двумерного течения от параметра пластичности при различных значениях W демонстрируют рост длины зоны двумерного течения с увеличением параметра пластичности. Структура течения вязкопластичной среды характеризуется наличием квазитвердых ядер в потоке, и значения реологических параметров существенно влияют на ее формирование.

ГЛАВА 4. Неизотермическое заполнение плоского канала неньютоновской жидкостью с учетом диссипативного разогрева

Неизотермичность течений полимерных жидкостей обусловливается диссипацией энергии в потоке, химическими превращениями, условиями теплообмена на границах. Задачи о неизотермических установившихся одномерных течениях ньютоновских и неньютоновских сред рассматриваются в работах [187–192], в которых в основном использовались аналитические методы решения. Продемонстрированы режимы течения с возможностью реализации гидродинамического теплового взрыва. В экспериментальных работах [178, 193] проводятся исследования течений вязкопластичной жидкости в круглой трубе с заданным расходом, определены критические значения числа Рейнольдса, разделяющего ламинарный и турбулентный режимы. Результаты численных исследований неизотермических течений вязкопластичной жидкости в плоском канале, цилиндрической трубе и коаксиальном зазоре представлены в [194–199]. В этих работах подробно исследуется зависимость значений теплового потока на стенке от определяющих параметров, но уделено мало внимания вопросу о структуре потока.

Исследования начального участка гидродинамической стабилизации неизотермического потока в случае течения жидкости в плоском канале / круглой трубе без учета свободной поверхности выполнены в работах [200–205]. Рассмотрены различные реологические модели с учетом температурной зависимости параметров, продемонстрировано формирование «замерзшего» слоя на стенках канала.

Имеются работы, в которых исследования проводятся с учетом свободной границы [116, 206, 215, 216, 207–214]. В [206, 209] выполнено численное моделирование неизотермического заполнения канала степенной жидкостью с экспоненциальной зависимостью консистенции от температуры, с использованием метода конечных элементов для расчета динамики свободной поверхности при заполнении плоского канала. Показаны качественные распределения некоторых характеристик в случае течения полиэтилена высокого давления. В работе [210] метод конечных элементов используется для расчета неизотермического течения между двумя бесконечными пластинами с учетом аррениусовской зависимости вязкости от температуры.

Результаты исследования процесса заполнения канала жидкостью с вязкостью, зависящей от температуры и давления, представлены в [211, 212]. Численное решение получено с помощью конечно-разностного метода. При этом используемая численная методика позволяет рассчитывать ориентацию волокон, содержащихся в жидкости. Выполнено сравнение с экспериментальными данными.

Авторы работ [116, 213, 214, 217] провели исследования процесса заполнения плоского канала жидкостью Карро с экспоненциальной зависимостью от температуры с привлечением технологии VOF для отслеживания местоположения свободной поверхности. Проиллюстрирована кинематика фонтанирующего течения и приведены качественные распределения характеристик потока.

В [207, 208, 216, 218, 219] проводится численное исследование неизотермического заполнения канала реологически сложной жидкостью, описываемой моделью Кросса, в том числе с учетом диссипативного разогрева и наличия свободной границы, с использованием метода конечных элементов, технологии ALE-метода, метода функции уровня для расчета динамики свободной поверхности. Демонстрируются распределения температуры, скорости. В [208] проводится сравнение с экспериментальными результатами для полиэтилена низкой плотности. Исследования [219] выполнены с учетом фазового превращения.

Задача о заполнении области между двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами вязкопластичной жидкостью в неизотермических условиях решается методом конечных разностей в [220]. Применение SPH-метода для моделирования неизотермического заполнения каналов различной геометрии вязкоупругой средой описано в [221].

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим неизотермическое заполнение канала несжимаемой неньютоновской жидкостью в поле силы. Течение описывается системой уравнений движения, энергии и неразрывности:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g},$$

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + \Phi,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

которая замыкается реологическим уравнением с экспоненциальной зависимостью параметров от температуры.

$$\tau_{ij} = \frac{\tau_0 e^{-\beta_1(T-T_0)} + K_0 e^{-\beta_2(T-T_0)}\dot{\gamma}^m}{\dot{\gamma}} e_{ij},\ \tau > \tau_0 e^{-\beta_1(T-T_0)};$$

$$e_{ij} = 0,\ \tau \le \tau_0 e^{-\beta_1(T-T_0)}.$$

Здесь t – время, $\mathbf{u} = (u, v)$ –вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, $\mathbf{T}$ – тензор вязких напряжений с компонентами τ_{ij}, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, c – теплоемкость среды, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура, Φ – диссипативная функция, K_0 и τ_0 – коэффициент консистенции и предел текучести при температуре T_0, β_1 и β_2 – параметры реологического закона, $\dot{\gamma}$ и τ – интенсивность тензора скоростей деформаций и тензора вязких напряжений.

На свободной границе Γ_1 выполняются условия отсутствия касательного напряжения и равенство нормального внешнему давлению, которое без ограничения общности можно считать равным нулю, и задан нулевой тепловой поток. Кроме того, свободная граница подчиняется кинематическому условию. На входной границе Γ_2 задаются профили скорости и температуры, характерные для установившегося течения в плоском / осесимметричном канале с постоянным расходом. На твердой стенке Γ_3 выполняется условие прилипания и задана постоянная температура T_1. На линии симметрии Γ_4 выполняется условие симметрии. Силы поверхностного натяжения считаются пренебрежимо малыми и не учитываются.

В начальный момент времени канал частично заполнен покоящейся жидкостью, и свободная граница расположена на достаточном удалении от входной границы Γ_2, чтобы исключить ее влияние на характер течения в окрестности последней.

Математическая постановка задачи переписывается в безразмерных переменных. В качестве масштабов используются следующие величины: длины – полуширина канала / радиус трубы L; скорости – среднерасходная скорость во входном сечении U; давления – величина $K_1 (U/L)^m$; времени – L / U, где $K_1 = K_0 e^{-\beta_2(T_1-T_0)}$ – консистенция при температуре T_1. Безразмерная температура вводится следующим образом: $\theta = \beta_2 (T - T_1)$. Сохраняя обозначения для безразмерных переменных, систему уравнений, описывающую неизотермическое движение вязкой жидкости в проекциях на оси декартовой ($\alpha = 0$) или цилиндрической ($\alpha = 1$) системы координат, перепишем в виде

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x_1}+v\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\alpha\eta\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u}{x_1}\right),$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x_1}+v\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial\eta}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\frac{\eta}{x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\mathrm{W}, \quad (4.1)$$

$$\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+v\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}+\mathrm{Br}\,\Phi+\alpha\frac{1}{x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}+\alpha\frac{u}{x_1}=0.$$

Выражение для определения безразмерной эффективной вязкости записывается следующим образом:

$$\eta=\frac{\mathrm{Bn}\,e^{-\beta\theta}+e^{-\theta}\left|\dot{\gamma}\right|^m}{\left|\dot{\gamma}\right|}. \quad (4.2)$$

Здесь $\mathrm{Re}=\rho U^{2-m}L^m/K_1$ – число Рейнольдса, $\mathbf{W}$ = (0, –W), $\mathrm{W}=\rho g L^{m+1}/\left(K_1U^m\right)$ – безразмерный критерий, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил, Pe = $c\rho UL$ / λ – число Пекле, $\mathrm{Br}=K_1\beta_2U^{1+m}L^{1-m}/\lambda$ – число Бринкмана, $\mathrm{Bn}=\tau_1L^n/K_1U^n$ – число Бингама, $\beta=\beta_1/\beta_2$, $\tau_1=\tau_0e^{-\beta_2(T_1-T_0)}$ – предел текучести при температуре T_1.

Граничные условия записываются в виде

$$\begin{gathered}\Gamma_1:\frac{\partial u_n}{\partial s}+\frac{\partial u_s}{\partial n}=0,\quad p=2B\frac{\partial u_n}{\partial n},\quad \frac{\partial\theta}{\partial n}=0;\\ \Gamma_2:u=0,\quad v=V_1(x_1),\quad \theta=\theta_1(x_1);\\ \Gamma_3:u=0,\quad v=0,\quad \theta=0;\\ \Gamma_4:u=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_1}=0,\end{gathered} \quad (4.3)$$

где u_n, u_s – нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности, $V_1(x_1)$ и $\theta_1(x_1)$ – профили скорости и температуры, соответствующие установившемуся течению в бесконечном канале / трубе с единичным расходом. Условия на границе Γ_1 записаны в локальной декартовой системе координат (n, s), связанной со свободной поверхностью. Кинематическое условие записано в лагранжевом представлении

$$\frac{dx_1}{dt} = u, \frac{dx_2}{dt} = v. \tag{4.4}$$

Величина механической энергии, перешедшей в тепловую, определяется диссипативной функцией

$$\Phi = \eta\dot{\gamma}^2,$$

$$\dot{\gamma}^2 = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 + \alpha\left(\frac{u}{x_1}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2.$$

4.2. Установившееся неизотермическое течение реологически сложной жидкости в бесконечном канале / трубе

Рассмотрим установившееся движение неньютоновской жидкости в плоском канале / круглой трубе с учетом диссипативного разогрева и экспоненциальной зависимости коэффициента консистенции от температуры. Движение осуществляется под действием заданного перепада давления на единицу длины δp ($\delta p < 0$), который обеспечивает единичный расход. На твердой стенке выполняется условие прилипания и задана температура, на линии симметрии – условие симметрии потока. Математическая постановка задачи включает уравнения движения и теплопроводности, которые с учетом сделанных допущений примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{1}{x_1^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\alpha \eta \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = \delta p, \\ \frac{1}{x_1^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) + \mathrm{Br}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Система замыкается законом Балкли–Гершеля с экспоненциальной зависимостью реологических параметров от температуры, согласно которому эффективная вязкость η определяется выражением

$$\eta = \frac{\mathrm{Bn}\, e^{-\beta\theta} + e^{-\theta}\left|\dfrac{dv}{dx_1}\right|^m}{\left|\dfrac{dv}{dx_1}\right|}. \tag{4.6}$$

Граничные условия записываются следующим образом:

$$x_1 = 0: \ \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0; \quad x_1 = 1: \ v = 0, \ \theta = 0. \tag{4.7}$$

Величина δp выбирается такой, чтобы объемный расход жидкости через единицу площади равнялся единице

$$2^{\alpha} \int_0^1 u x_1^{\alpha} dx_1 = 1. \tag{4.8}$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию профилей скорости и температуры, удовлетворяющих системе уравнений (4.5)–(4.6) и условиям (4.7)–(4.8). В дальнейших рассуждениях введем обозначение $x = x_1$.

4.2.1. Точное решение для случая ньютоновской и степенной жидкостей

Выполним математические преобразования для случая течения степенной жидкости (Bn = 0). Проинтегрировав один раз уравнение движения системы (4.5) и воспользовавшись граничным условием на линии симметрии для определения константы интегрирования, получим

$$\eta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\delta p \ x}{\alpha + 1}. \tag{4.9}$$

Из последнего уравнения видно, что величина $\frac{\partial v}{\partial x}$ отрицательная в диапазоне изменения $0 < x \le 1$. Раскрыв модуль в выражении для эффективной вязкости (4.6) при Bn = 0 и подставив его в (4.9), запишем следующее выражение для скорости сдвига:

$$\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{\delta p}{\alpha + 1} e^{\theta} x \right)^{\frac{1}{m}}. \tag{4.10}$$

Подставив его в уравнение теплопроводности, получим

$$\frac{1}{x^{\alpha}} \frac{d}{dx} \left(x^{\alpha} \frac{d\theta}{dx} \right) + \mathrm{Br} \left(-\frac{\delta p}{\alpha + 1} \right)^{\frac{m+1}{m}} e^{\frac{\theta}{m}} x^{\frac{m+1}{m}} = 0. \tag{4.11}$$

Теперь тепловую задачу можно решить независимо от гидродинамической. Для случая течения ньютоновской жидкости (m = 1) в круглой трубе (α = 1) решение можно записать в аналитическом виде. Выполнив математические преобразования, получаем аналитические выражения для профиля скорости и температуры [222], которые являются решением системы уравнений (4.5)–(4.6) с граничными условиями (4.7), но не удовлетворяют условию (4.8), так как произвольное значение параметра δp не обеспечивает единичный расход.

$$v(x) = -\frac{16b}{\mathrm{Br}\,\delta p}\left[\frac{b}{1+b^2} + \mathrm{acrtg}\,b - \frac{bx^2}{1+b^2x^4} - \mathrm{arctg}\left(bx^2\right)\right],$$
$$\theta = -\ln\left[\frac{\mathrm{Br}\,\delta p^2}{128}\left(bx^4 + \frac{1}{b}\right)^2\right], \tag{4.12}$$

где

$$b = \left(\frac{32}{\mathrm{Br}\,\delta p^2}\right)^{0,5} \pm \left(\frac{32}{\mathrm{Br}\,\delta p^2} - 1\right)^{0,5}. \tag{4.13}$$

При заданном значении перепада давления δp задача имеет два решения: низкотемпературное – соответствует знаку минус в последнем выражении и высокотемпературное – соответствует знаку плюс, для которых реализуется регулярный теплообмен (рис. 4.1). При этом расход жидкости через сечение трубы имеет разные значения для этих режимов. Определим значение δp, которое обеспечивает единичный расход жидкости через сечение трубы.

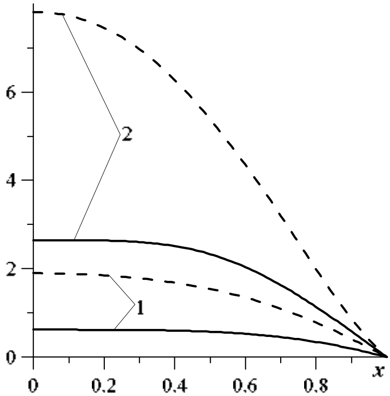


Рис. 4.1. Профили скорости (сплошные линии) и температуры (пунктирные линии), Br = 1, $\delta p = -5$; *1* – низкотемпературное решение, *2* – высокотемпературное

Проинтегрировав выражение для скорости по сечению трубы, получим выражение для расхода жидкости

$$Q = 2\int_0^1 v(x)x dx = -\frac{16}{\mathrm{Br}\,\delta p}\frac{b^2}{1+b^2}.$$

Подставив в последнее равенство выражение для b (4.13), запишем функцию расхода в зависимости от перепада δp

$$Q(\delta p) = \frac{2\,\delta p}{8 \pm \sqrt{64 - 2\mathrm{Br}\,\delta p^2}} - \frac{16}{\mathrm{Br}\,\delta p}. \qquad (4.14)$$

Из последнего выражения, решив уравнение $Q(\delta p) = 1$, можно определить значение параметра δp, которое обеспечивает единичный расход в случае течения ньютоновской жидкости

$$\delta p = -\frac{16}{\mathrm{Br}+2}.$$

На рис. 4.2 представлены зависимости (4.14) для различных значений параметра Br, пунктирная линия соответствует высокотемпературному решению, сплошная – низкотемпературному. В случае $\mathrm{Br} \le 2$ (кривая *1*) единичный расход реализуется при низкотемпературном режиме. В случае $\mathrm{Br} > 2$ (кривая *3*) перепад δp, обеспечивающий единичный расход, дает высокотемпературный режим решения. В случае $\mathrm{Br} = 2$ решения совпадают.

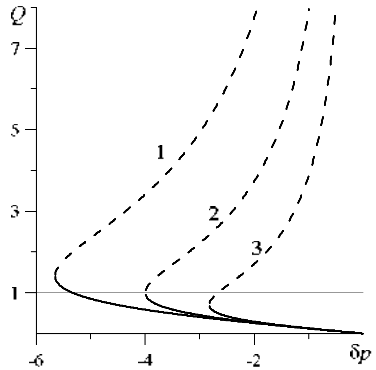


Рис. 4.2. Графики функции: *1, 2, 3* – Br = 1, 2, 4

Отметим, если формулировать постановку задачи без условия (4.8), то для любого значения параметра Бринкмана существует критическое значение перепада давления δp, ниже которого стационарного решения задачи не существует. Тепло, генерируемое вязкой диссипацией, не успевает отводиться через стенки канала. Это явление в литературе, по аналогии с тепловым взрывом [223], называют гидродинамическим тепловым взрывом [187]. Если же фиксируется расход жидкости, то из приведенных графиков на рис. 4.2 видно, что решение существует во всем диапазоне изменения Q.

В случае неизотермического течения степенной жидкости ($m \neq 1$) с экспоненциальной зависимостью консистенции от температуры в круглой трубе аналитическое выражение для профиля температуры записывается в виде [222]

$$\theta = -m \ln\left[\frac{c}{8}\left(bx^{\frac{3m+1}{m}} + \frac{1}{b}\right)^2\right], \tag{4.15}$$

где

$$c = \frac{4m\mathrm{Br}}{(3m+1)^2}\left(-\frac{\delta p}{2}\right)^{\frac{m+1}{m}},\quad b = \left(\frac{2}{c}\right)^{0,5} \pm \left(\frac{2}{c} - 1\right)^{0,5}.$$

4.2.2. Численная методика решения задачи об установившемся неизотермическом течении неньютоновской жидкости

В области решения ($0 \le x \le 1$) строится расчетная сетка, представленная на рис. 4.3. В узлах сетки с целыми индексами рассчитывается скорость, с дробными – вязкость и температура.

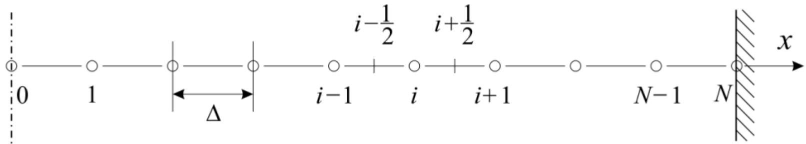


Рис. 4.3. Расчетная сетка

Конечно-разностные аналоги системы (4.5) записываются в форме, используемой для реализации метода прогонки [170]

$$\begin{gathered} x^{\alpha}_{i+0.5}\eta_{i+0.5}v_{i+1} - \left(x^{\alpha}_{i+0.5}\eta_{i+0.5} + x^{\alpha}_{i-0.5}\eta_{i-0.5}\right)v_i + x^{\alpha}_{i-0.5}\eta_{i-0.5}v_{i-1} = \delta p \Delta^2 x^{\alpha}_i, \\ x^{\alpha}_{i+1}\theta_{i+1.5} - \left(x^{\alpha}_{i+1} + x^{\alpha}_i\right)\theta_{i+0.5} + x^{\alpha}_i\theta_{i-0.5} + \mathrm{Br}\eta_{i+0.5}\left(v_{i+1} - v_i\right)^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Выражение (4.6) и граничные условия (4.7) в разностном представлении принимают вид

$$\eta_{i+0,5} = \frac{\mathrm{Bn}\, e^{-\beta\theta_{i+0,5}} + e^{-\theta_{i+0,5}} \left| \dfrac{v_{i+1} - v_i}{\Delta} \right|^m}{\left| \dfrac{v_{i+1} - v_i}{\Delta} \right|};$$

$$u_0 = u_1 - \frac{0,5\ \delta p\ \Delta^2}{(1+\alpha)\eta_{0,5}},\ \theta_{0,5} = \theta_{-0,5}; \qquad (4.17)$$

$$u_N = 0,\ \theta_{N+0,5} = -\theta_{N-0,5}.$$

Дискретизация условия симметрии для скорости выполняется с привлечением фиктивного узла и разностного аналога уравнения движения, записанного для узла $i = 0$. Выбранная расчетная сетка удобна для стыковки с разнесенной расчетной сеткой, используемой в методе контрольного объема для решения двумерных задач. Разностные аналоги (4.16), (4.17) аппроксимируют дифференциальные уравнения (4.5), зависимость (4.6) и условия (4.7) со вторым порядком точности. Полученные системы алгебраических уравнений (4.16) решаются методом прогонки. Совместное решение системы разностных уравнений (4.16) для получения стационарных полей скорости и температуры обуславливает организацию итерационного процесса. В качестве начального приближения для итерационного процесса используется нулевое значение безразмерной температуры.

Значение параметра δp, обеспечивающего выполнение условия (4.8) с заданной точностью, подбирается методом деления отрезка пополам [224]. В качестве критерия сходимости итерационного процесса для нахождения стационарных полей скорости и температуры используются условия

$$\max_i \left| \frac{v_i^{k+1} - v_i^k}{v_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_u,\ \max_i \left| \frac{\theta_i^{k+1} - \theta_i^k}{\theta_i^{k+1}} \right| < \varepsilon_\theta,\ 0 \le i \le N-1,$$

где верхний индекс соответствует номеру итерации, а нижний – номеру расчетного узла.

Расчет интеграла в выражении (4.8) выполняется с использованием метода трапеций. Сходимость алгоритма определения δp, обеспечивающего выполнение равенства (4.8), определяется выполнением условия

$$\left| 1 - 2^\alpha \sum_{i=1}^{N} \frac{v_{i-1} x_{i-1}^\alpha + v_i x_i^\alpha}{2} \Delta \right| < \varepsilon_Q.$$

Для проверки аппроксимационной сходимости разработанной методики расчета проведена серия расчетов на последовательности сеток.

В табл. 4.1а и 4.1 б представлены значения скорости и температуры в точке $x = 0$ и значения безразмерного перепада давления δp для осесимметричного и плоского случаев на последовательности сеток, вычисленные с помощью описанной выше численной методики.

Таблица 4.1а

Bn = 0, Br = 1, m = 0,6, α = 1, $\varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$

Δ	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200	Аналитическое решение
u_0	1,9906	1,9827	1,9805	1,9802	1,9801	–
θ_0	0,5140	0,5136	0,5135	0,5135	0,5135	0,5135
δp	–3,8930	–3,8975	–3,8986	–3,8989	–3,8989	–

Таблица 4.1б

Bn = 0, Br = 1, m = 0,6, α = 0, $\varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$

Δ	1/10	1/20	1/50	1/100	1/200
u_0	1,4544	1,4545	1,4546	1,4546	1,4546
θ_0	0,4254	0,4258	0,4259	0,4259	0,4259
δp	–1,7071	–1,7113	–1,7125	–1,7126	–1,7126

Представленные результаты демонстрируют аппроксимационную сходимость предлагаемой методики расчета. Во всех последующих расчетах используется сетка с шагом 1 / 200 и $\varepsilon_u = \varepsilon_\theta = \varepsilon_Q = 10^{-5}$.

4.2.3. Результаты расчетов течения ньютоновской жидкости

Влияние параметра Br на характеристики течения вязкой жидкости в плоском / осесимметричном канале демонстрируется на рис. 4.4.

Учет вязкой диссипации механической энергии формирует в канале ненулевой профиль температуры. Установившийся режим течения реализуется в случае теплового баланса. Все тепло, образовавшееся внутри канала за счет вязкого трения, отводится через твердые стенки. Рост параметра Br приводит к увеличению температуры во всей области, при этом значение вязкости в центральной части канала уменьшается и растет значение максимальной скорости. Точками на графиках отмечено аналитическое решение (4.12). Профили скорости, соответствующие высокотемпературному режиму (Br > 2), характеризуются наличием точки перигиба на графике скорости, при этом максимум диссипативной функции реализуется в ее окрестности.

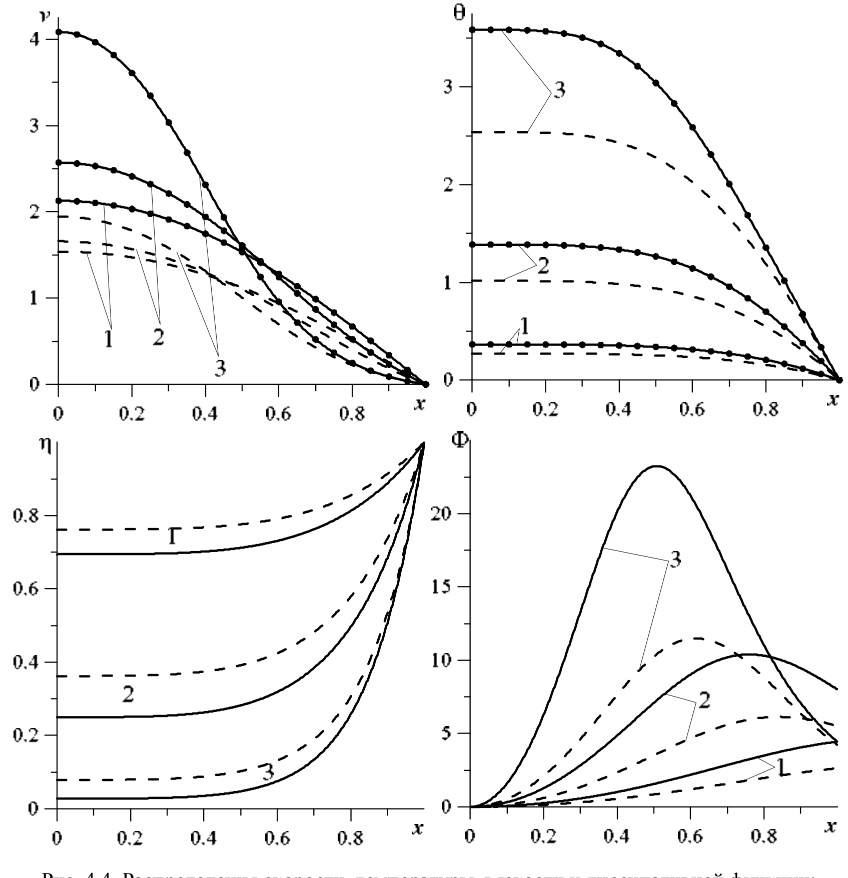


Рис. 4.4. Распределения скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции:
1, 2, 3 – Br = 0,4; 2; 10; сплошная линия – $\alpha = 1$, пунктирная линия – $\alpha = 0$

Изменение безразмерного перепада давления δp, обеспечивающего единичный расход вязкой жидкости, от значения параметра Br представлено на рис. 4.5, *а*. Увеличение Br приводит к росту диссипативной функции, как следствие, повышению температуры (рис. 4.5, *б*) и уменьшению вязкости. В результате падают вязкие напряжения и абсолютное значение перепада δp.

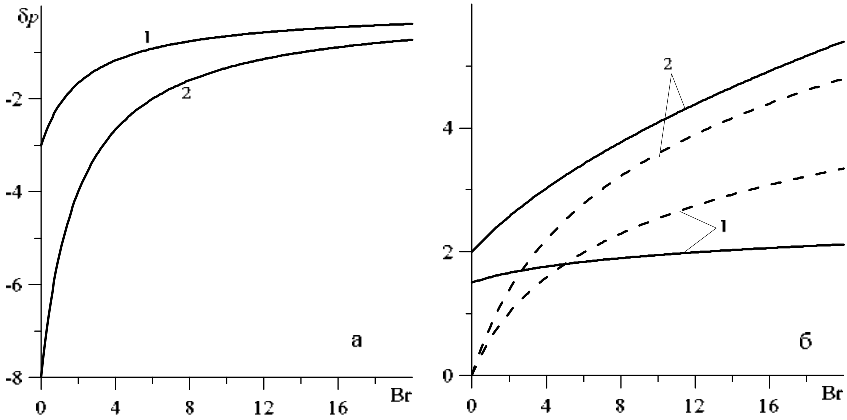


Рис. 4.5. Зависимости перепада давления δp (*а*), температуры (сплошные линии) и скорости (пунктирные линии) на линии симметрии (*б*) от параметра Br: *1* – $\alpha = 0$, *2* – $\alpha = 1$

4.2.4. Результаты расчетов течения степенной жидкости

С использованием описанной вычислительной технологии проведены параметрические расчеты для плоского и осесимметричного течений степенной жидкости (Bn = 0). Для подтверждения достоверности результатов численного решения проведем сравнение с аналитическим решением для случая течения в цилиндрической трубе (4.15).

На рис. 4.6 представлены профили скорости и температуры для плоского и осесимметричного течений псевдопластичной жидкости при различных значениях параметра Br. Точками на сплошных кривых рис. 4.6, *б* показано аналитическое решение (4.15). Распределения скорости, температуры и диссипативной функции качественно совпадает с таковыми для случая вязкой жидкости (см. рис. 4.4). Большие значения эффективной вязкости в окрестности линии симметрии объясняются уменьшением скорости сдвига по мере приближения к точке $x = 0$. С ростом числа Br в окрестности стенки реализуется зона повышенной вязкости, связанная с формированием в этой области течения с малыми скоростями.

На рис. 4.7 показано влияние параметра нелинейности m степенного реологического закона на распределения искомых характеристик. Качественный характер влияния параметра m на формирование профиля скорости в окрестности линии симметрии и на значение ее максимальной скорости совпадает с таковым для случая изотермического стационарного течения степенной жидкости в плоской щели и в круглой трубе.

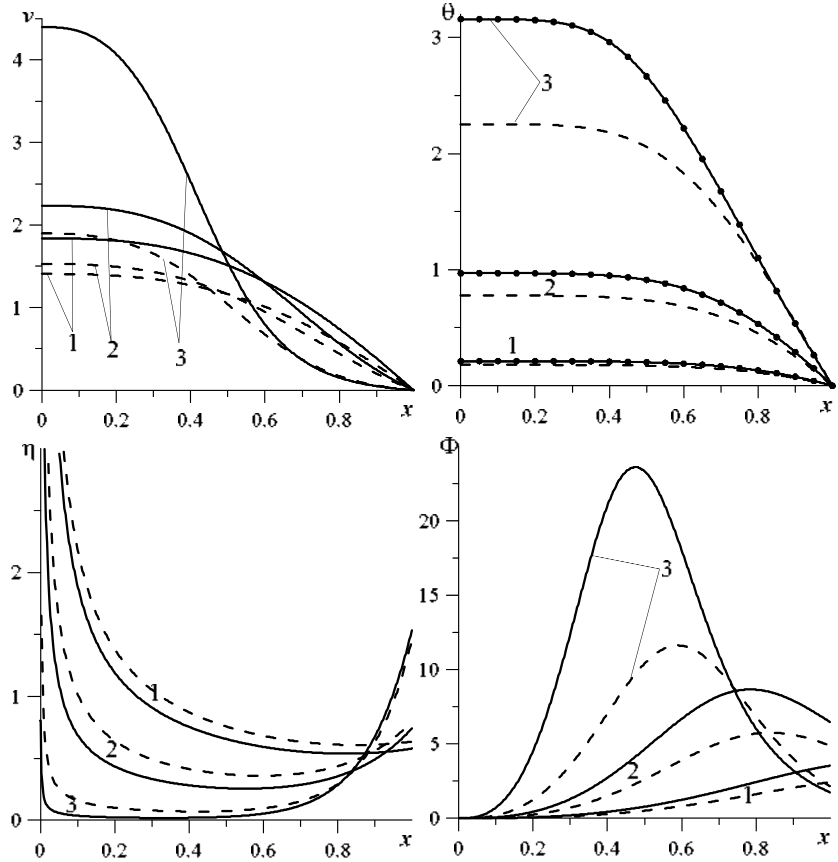


Рис. 4.6. Профили скорости, температуры, вязкости
и диссипативной функции, пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия –
$\alpha = 1$, $m = 0{,}6$: *1, 2, 3* – Br = 0,4; 2; 10

По мере приближения к линии симметрии значение скорости сдвига уменьшается и равно нулю на линии симметрии. Эффективная вязкость псевдопластичной жидкости ($m < 1$) достигает больших значений в окрестности линии симметрии, несмотря на максимальные значения температуры в этой области. Влияние температуры на вязкость заметно проявляется в окрестности стенки.

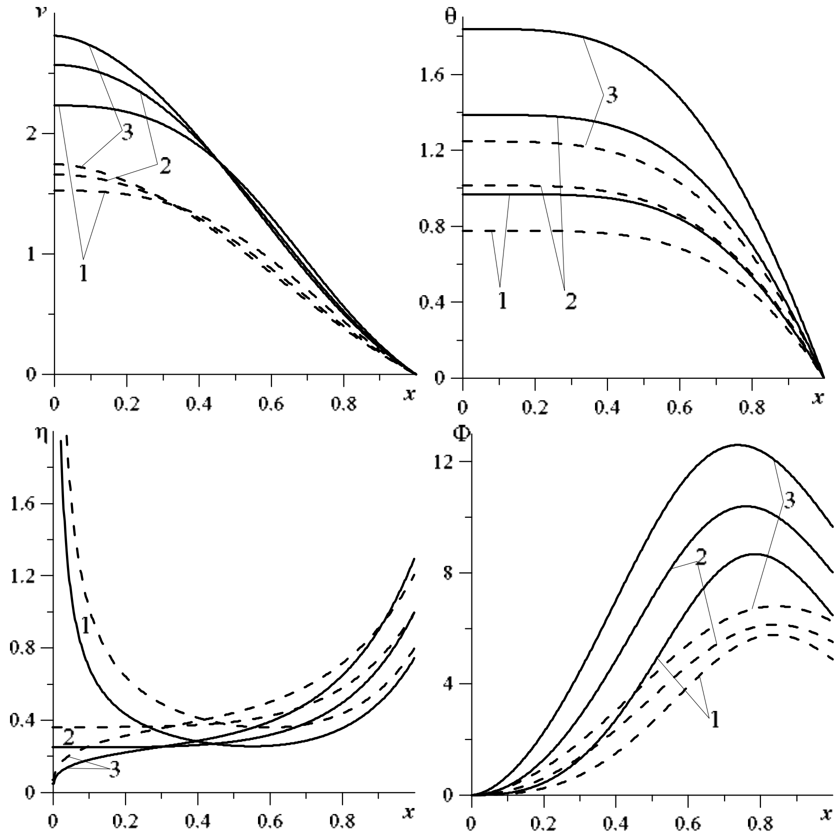


Рис. 4.7. Профили скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции,
пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$, Br = 2: *1, 2, 3* – m = 0,6; 1; 1,4

4.2.5. Результаты расчетов течения вязкопластичной жидкости

Рассмотрим установившееся неизотермическое течение вязкопластичной жидкости Балкли–Гершеля с учетом зависимости реологических параметров от температуры. Поставленная задача решается численно с использованием вышеописанной методики. Для преодоления особенности бесконечной вязкости в областях с малыми скоростями деформаций выполняется регуляризация реологической модели согласно [166].

Влияние параметра Bn на распределения характеристик установившегося потока представлено на рис. 4.8. Наличие предела текучести приводит к образованию в области течения квазитвердых ядер, которые определяются с помощью условия

$$\eta\left|\frac{dv}{dx}\right| < \mathrm{Bn}\, e^{-\beta\theta}.$$

Можно выделить два характерных режима с одним ядром в окрестности линии симметрии аналогично случаю изотермического течения (кривые *1*, *2*) и с ядром в окрестности линии симметрии и застойной зоной около стенки (кривые *3*). Соответствующие значения координат границ квазитвердого ядра h_1 и застойной зоны h_2 приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Значение характеристик потока h_1 и h_2, Bn = 2, β = 1, *m* = 1

	α = 0		α = 1	
	h_1	h_2	h_1	h_2
Br = 0,4	0,281	–	0,229	–
Br = 2	0,173	–	0,097	–
Br = 10	0,088	0,808	0,022	0,776

Пристенная зона представляет собой слой неподвижной жидкости. В центральном ядре жидкость имеет постоянные значения скорости и температуры. Выделение тепла за счет вязкой диссипации происходит только в зоне сдвигового движения между ядром и застойной зоной. При малых значениях числа Br диссипативные эффекты малы, жидкость прогревается слабо, и как следствие не наблюдается сильного изменения вязкости за счет температуры. С ростом числа Br прогрев за счет вязкой диссипации механической энергии увеличивается. В результате вязкость в области сдвигового течения уменьшается, а на стенке формируется «замерзший» слой. Размеры квазитвердого ядра в центральной части канала уменьшаются.

Исследования одномерного потока в зависимости от числа Bn показывают аналогичные тенденции, при малых Bn реализуется течение с одним центральным ядром, а с его ростом – режим с ядром и застойной зоной.

На рис. 4.9, *а* представлены зависимости координат границ квазитвердого ядра h_1 и застойной зоны h_2 от числа Bn. При малых Br диссипативные эффекты малы, и на значение вязкости температура оказывает малое влияние. В результате влияние Bn аналогично изотермическому случаю. С ростом Br наблюдаются качественные и количественные изменения в картине течения. С одной стороны, большие числа Bn генерируют большие вязкие напряжения в сдвиговой области течения и как следствие большие значения диссипативной функции. С другой – диссипация приводит к росту температуры и как следствие уменьшению вязкости. В результате в канале / трубе реализуется режим течения с ядром и застойной зоной.

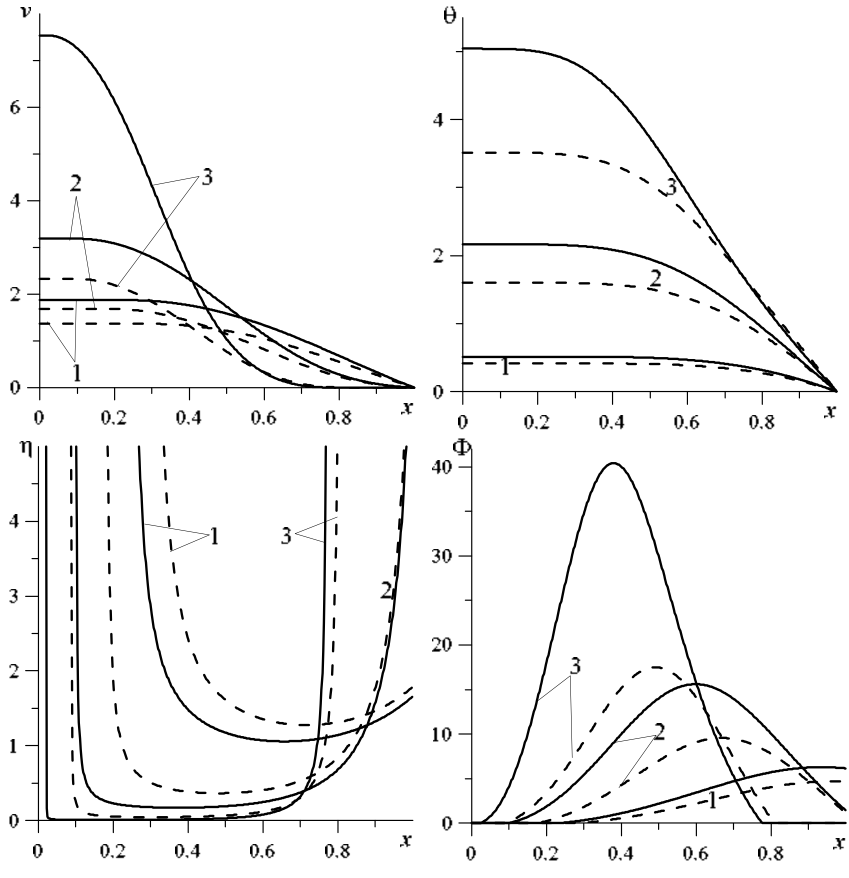


Рис. 4.8. Профили скорости, температуры, вязкости и диссипативной функции, пунктир – $\alpha = 0$, сплошная линия – $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $m = 1$, Bn = 2: *1, 2, 3* – Br = 0,4; 2; 10

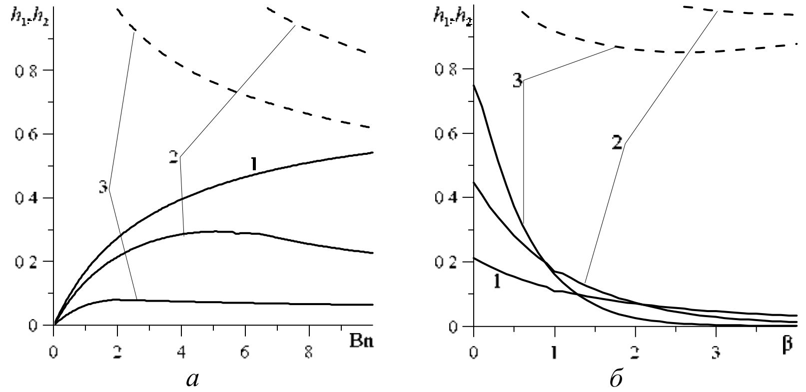


Рис. 4.9. Зависимость координат границ квазитвердого ядра (сплошные линии) и застойной зоны (пунктирные линии)
от числа Bn (*а*): α = 1, β = 1, *m* = 1: *1, 2, 3* – Br = 0,1; 0,5; 2,5;
от числа β (*б*): α = 1, *m* = 1, Br = 1: *1, 2, 3* – Bn = 1; 2,5; 5

Влияние параметра β, увеличение которого уменьшает значение предела текучести, демонстрирует рис. 4.9, *б*. С его ростом вязкие напряжения уменьшаются, что приводит к уменьшению квазитвердого ядра и переходу из режима с одним ядром в режим с ядром и застойной зоной.

Результаты исследования структуры потока в зависимости от степени нелинейности *m* представлены на рис. 4.10. В рассматриваемом диапазоне изменения, который охватывает дилатантную и псевдопластичную области, можно получить вышеописанные режимы в зависимости от значений определяющих параметров.

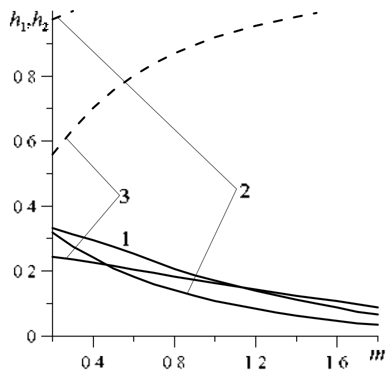


Рис. 4.10. Зависимость h_1 и h_2 от параметра *m*, α = 1, β = 1, Br = 1: *1, 2, 3* – Bn = 1; 2,5; 5

4.3. Методические расчеты

Тестирование методики расчета неизотермического течения реологически сложной жидкости проводилось на задаче течения в плоском канале с заданным расходом с учетом диссипативного разогрева и экспоненциальной зависимости вязкости от температуры. На входе в канал задавались параболический профиль для скорости и нулевая безразмерная температура, а на выходе – мягкие граничные условия. На твердой стенке выполнялись условия прилипания. При этом длина канала выбирается достаточной для установления стационарного течения в выходном сечении.

Стационарное решение задачи находится методом установления. В окрестности входной границы формируется область стабилизации течения, в которой профили скорости и температуры перестраиваются с заданных во входном сечении на профили, соответствующие полностью развитому течению (рис. 4.11.).

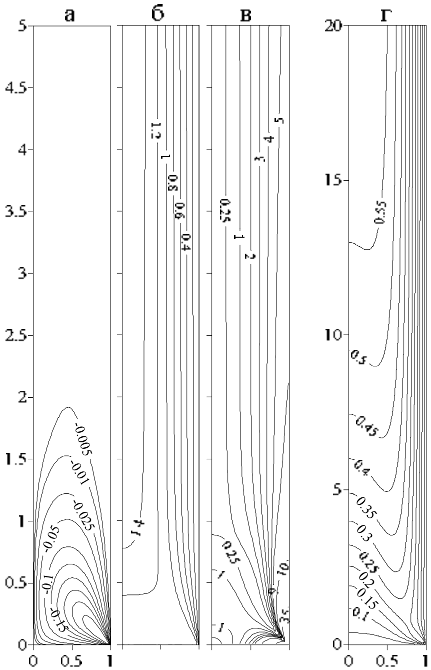


Рис. 4.11. Изолинии u (*а*), v (*б*), Φ (*в*) и θ (*г*) при Re = 0,01, Pe = 10, Br = 1, Bn = 0, m = 1, α = 0

Кинематические характеристики имеют практически одномерное распределение в сечении на расстоянии 2 от входной границы, а тепловые – на расстоянии порядка 20. Результаты расчетов в выходном сечении, которое расположено на расстоянии 30 единиц от входа, сравнивались с аналитическим решением эквивалентной одномерной задачи, описанной в предыдущем параграфе.

В табл. 4.3 приведены значения скорости v и температуры θ на линии симметрии в выходном сечении, а также величины относительных отклонений от значений v_0, θ_0, которые получены при решении одномерной задачи.

$$E_1 = \frac{v - v_0}{v_0} 100\%, \; E_2 = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0} 100\%.$$

Таблица 4.3

Значение скорости v, температуры θ в зависимости от шага сетки Δ при Re = 0,01, Pe = 10, Br = 1, Bn = 0, m = 1, α = 0

Δ	v	E_1 %	θ	E_2 %
1/10	1,5839	0,42	0,5926	1,20
1/20	1,5886	0,13	0,5958	0,67
1/40	1,5899	0,05	0,5973	0,42
	1,5907		0,5998	

На рис. 4.12 представлены распределения характеристик течения для параметров, когда решение одномерной задачи, обеспечивающее единичный расход, соответствует высокотемпературному режиму. Качественно картина течения не отличается от предыдущего случая, формируются зоны стабилизации и одномерного течения. Аппроксимационная сходимость методики расчета в этом случае демонстрируется в табл. 4.4. Относительные ошибки рассчитывались по сравнению с точным решением одномерной задачи, вычисленным по формуле (4.12) при $\delta p = -1{,}6$.

Таблица 4.4

Значение скорости v, температуры θ в зависимости от шага сетки Δ при Re = 0,01, Pe = 10, Br = 8, Bn = 0, m = 1, α = 1

Δ	v	E_1 %	θ	E_2 %
1/10	3,7116	1,50	3,1583	1,88
1/20	3,7514	0,44	3,2015	0,54
1/40	3,7612	0,18	3,2118	0,22
	3,7679		3,2189	

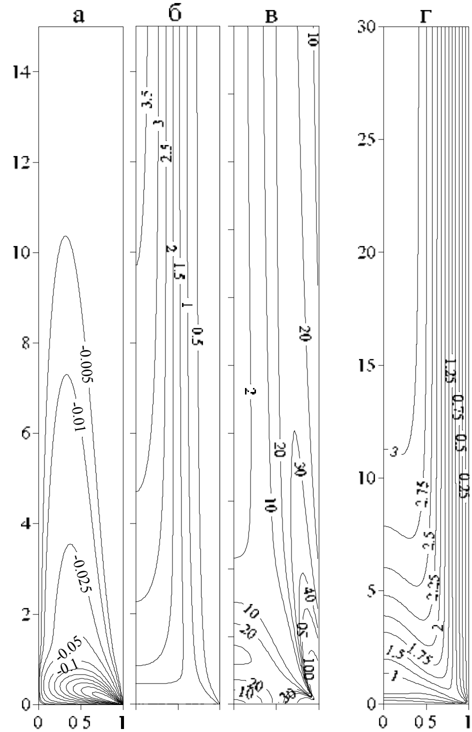


Рис. 4.12. Изолинии *u* (*а*), *v* (*б*), Ф (*в*) и θ (*г*)
при Re = 0,01, Pe = 10, Br = 8, α = 1

4.4. Результаты расчетов неизотермического течения вязкой жидкости при заполнении плоского канала

Рассматривается неизотермическое течение ньютоновской жидкости при заполнении плоского канала, описываемое системой уравнений (4.1). При этом вязкость экспоненциально зависит от температуры согласно (4.2) при Bn = 0 и m = 1. Для оценки эффекта вязкой диссипации в процессе заполнения на температуру среды и характеристики течения рассматриваются две физические постановки задачи. Вначале исследуется случай, в котором жидкость поступает в канал с постоянным расходом и температурой, равной температуре стационарного неизотермического потока жидкости в бесконечном канале с учетом диссипации механической энергии и зависимости вязкости от температуры. Граничные условия для скорости на входе и начальное распределение скорости и температуры соответствуют такому течению. Типичные распределения продольной скорости и температуры для стационарного течения представлены на рис. 4.4.

Эволюции поля температуры в окрестности свободной поверхности представлены на рис. 4.13 и 4.14 для различных значений числа Пекле.

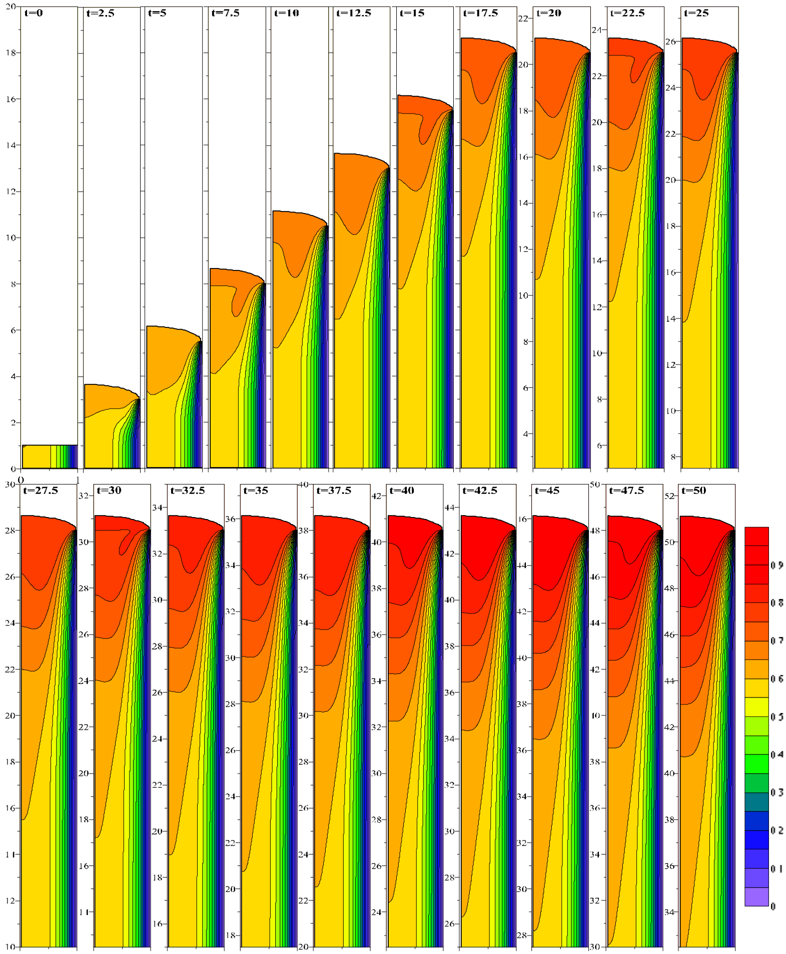


Рис. 4.13. Эволюция поля температуры во времени, Re = 0,01, Pe = 50, W = 2, Br = 1

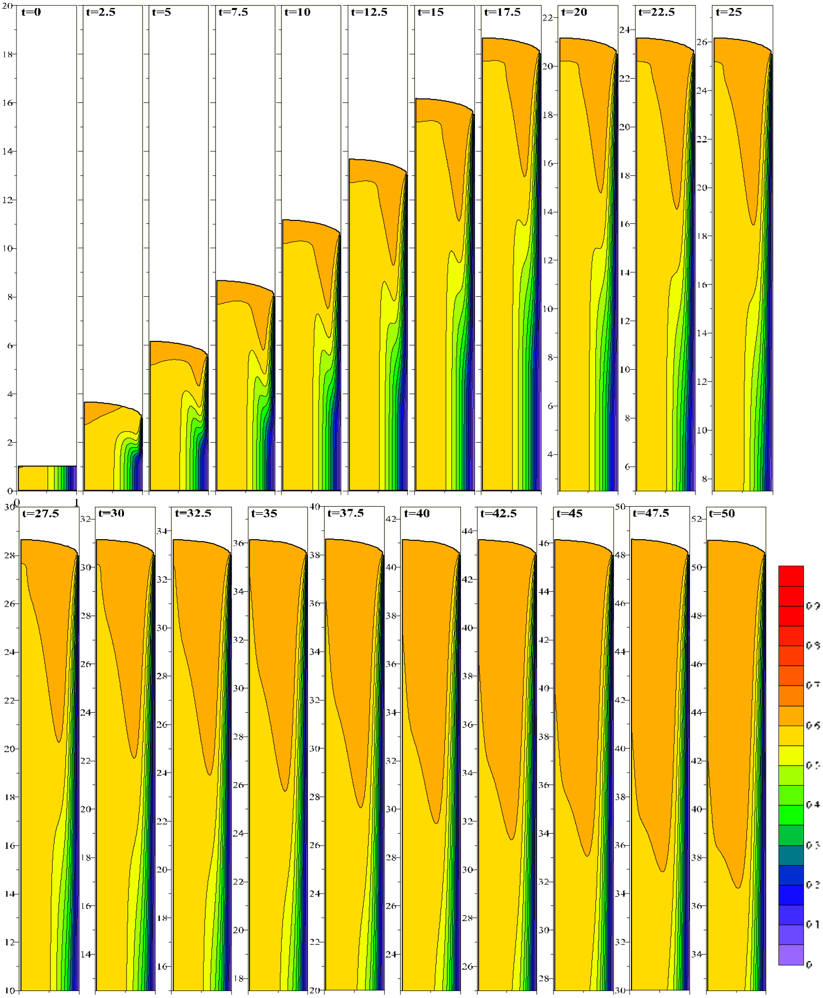


Рис. 4.14. Эволюция поля температуры во времени, Re = 0,01, Pe = 1000, W = 2, Br = 1

С течением времени в окрестности свободной границы жидкость прогревается до температуры, превышающей максимальную во входном сечении. При этом прогрев для Pe = 50 составляет 54,5%, а при Pe = 1000 – 5,6% к моменту времени 50, что демонстрирует рис. 4.15, *а*. При больших числах Пекле доминирующим является конвективный механизм переноса тепла, в результате тепло, выделившееся в окрестности фронта за счет диссипации, переносится к твердой стенке в соответствии с кинематикой фонтанирующего течения, где бóльшая его часть отводится через стенку, и жидкость практически не нагревается. При уменьшении числа Пекле конвективный механизм переноса ослабевает, и жидкость имеет бóльшую температуру в зоне фонтанирующего течения. На рассматриваемом участке зависимость максимальной температуры от времени можно с достаточной точностью аппроксимировать линейной функцией при Pe = 50.

Первоначально плоская граница раздела с течением времени приобретает выпуклую форму и практически устанавливается примерно к моменту t = 5 безразмерных единиц (рис. 4.15, *б*). Далее для больших значений Пекле Pe = 1000 изменение параметра χ составляет менее полпроцента, а для Pe = 50 – 3,5% в моменту t = 50, что можно объяснить незначительными изменениями тепловой и кинематической картины в области фонтанирующего течения. Расчеты показывают, что распределение тепловых характеристик в окрестности свободной поверхности устанавливается, однако для этого требуется время порядка 500 безразмерных единиц. Качественно картина распределения тепловых характеристик будет совпадать с таковой при t = 50.

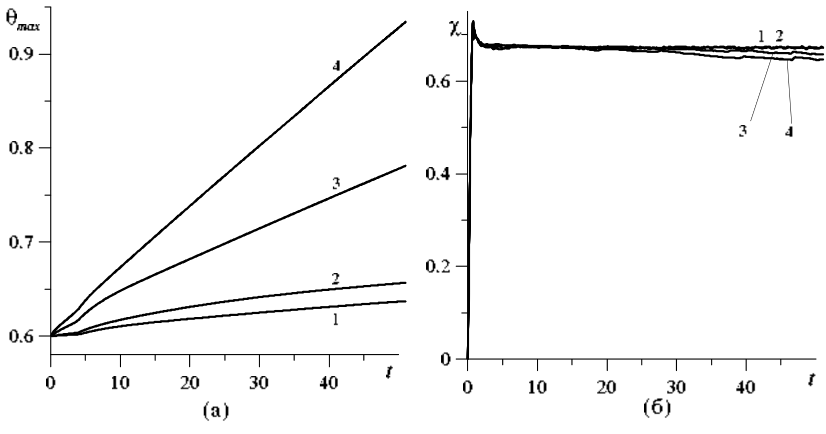


Рис. 4.15. Зависимость θ_{max} и χ от времени, Re = 0,01, W = 2, Br = 1:
1, 2, 3, 4 – Pe = 1000, 500, 100, 50

Исследования изотермического заполнения показывают, что формируется квазистационарный режим с установившейся формой свободной поверхности [43, 97, 103, 182]. При этом в потоке можно выделить зону одномерного течения на достаточном удалении от свободной границы и область двумерного фонтанирующего течения в ее окрестности. Характер распределения изолиний на рис. 4.13 и 4.14 показывает, что и в этом случае поток можно разделить на две зоны течения аналогично изотермическому приближению. В верхней части канала реализуется течение с двумерным полем температуры, а в нижней – с одномерным. В зоне одномерного течения реализуется регулярный теплообмен – тепло, выделяющееся за счет вязкой диссипации, отводится через стенку, которая имеет нулевую безразмерную температуру. В области двумерного течения жидкость на рассматриваемом временном участке постепенно прогревается.

Соотношение конвективного и кондуктивного теплопереноса в потоке характеризуется значением числа Пекле. На рис. 4.16 представлены распределения температуры, вязкости, давления и скорости при Pe = 50 и Pe = 1000, а значения остальных параметров совпадают с таковыми для результатов, представленных на рис. 4.13 и 4.14.

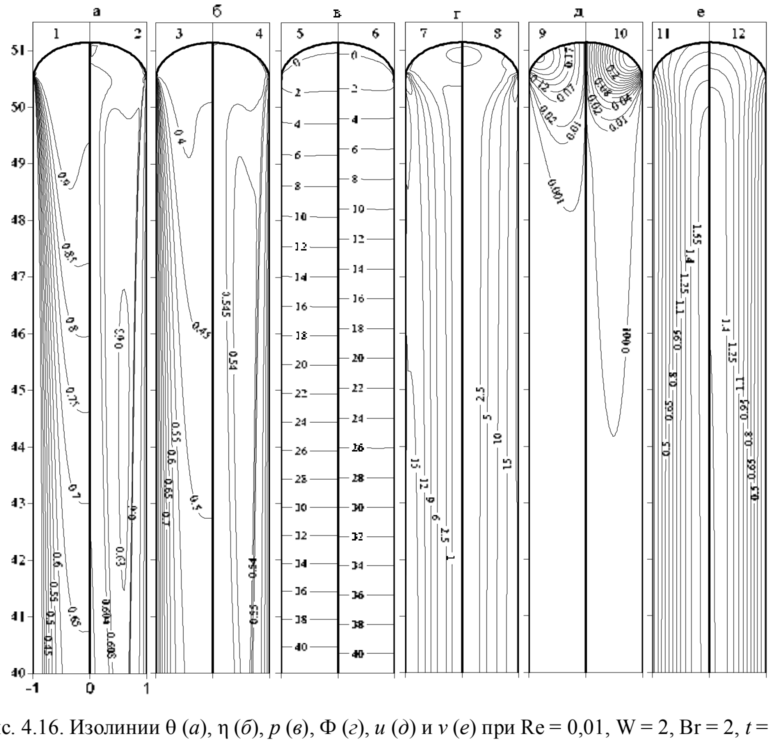


Рис. 4.16. Изолинии θ (*а*), η (*б*), *p* (*в*), Φ (*г*), *u* (*д*) и *v* (*е*) при Re = 0,01, W = 2, Br = 2, *t* = 50: Pe = 50 (*1, 3, 5, 7, 9, 11*), Pe = 1000 (*2, 4, 6, 8, 10, 12*)

Сравнение кинематических характеристик показывает увеличение зоны одномерного течения с ростом числа Пекле. Распределение диссипативной функции качественно не отличается, максимальное тепловыделение реализуется в окрестности свободной поверхности. При этом распределения температуры различны, максимум при Pe = 50 расположен в окрестности свободной границы, а при Pe = 1000 смещается на некоторое удаление от нее.

Профили температуры в сечениях x_2 = const для разных значений Pe представлены на рис. 4.17. Для обоих значений числа Пекле слой жидкости около линии симметрии имеет практически постоянную температуру независимо от выбранного сечения, что является следствием малых значений инварианта тензора скоростей деформаций в этой области и слабого вклада кондуктивного теплопереноса при больших значениях Pe. При этом вдоль линии симметрии температура практически не изменяется для Pe = 1000 на рассматриваемом временном отрезке. Однако в части потока в окрестности твердой стенки с ростом числа Pe происходит качественное изменение профиля температуры. Повышение роли конвективного теплопереноса с увеличением значения числа Пекле приводит к формированию в пристенной области в зоне двумерного течения локального участка повышенной температуры и усилению влияния свободной границы на распределение температуры и как следствие его отклонению от профиля, характерного для одномерного течения в бесконечном канале (см. рис. 4.4). С увеличением числа Пекле распределение изотерм в большей степени соответствует кинематике фонтанирующего течения.

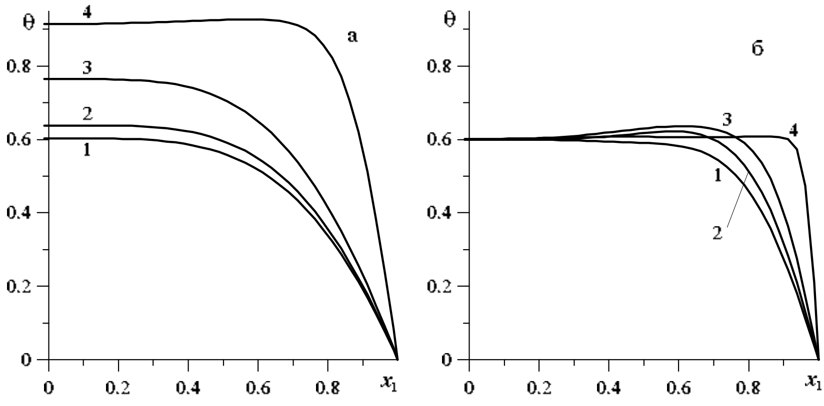


Рис. 4.17. Распределение температуры в сечениях y = const при Re = 0,01, W = 2, Br = 1; Pe = 50 (*а*), 1000 (*б*): y = 35 (*1*), 40 (*2*), 45 (*3*), 50 (*4*)

Профили продольной скорости на рис. 4.18 демонстрируют совпадение качественного поведения кривых для обоих значений Pe и незначительные количественные отличия. Увеличение числа Re до 1 и параметра W до 10 не вносит изменений в качественное поведение характеристик течения, количественные изменения также незначительны.

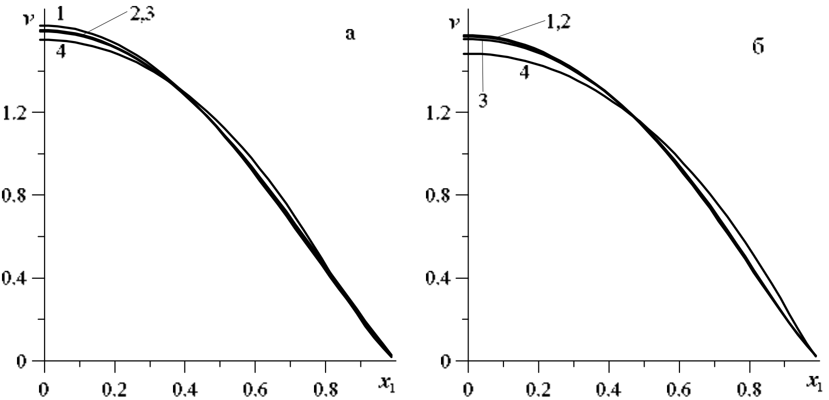


Рис. 4.18. Распределение продольной скорости в сечениях y = const при Re = 0,01, W = 2, Br = 1; Pe = 50 (*а*), 1000 (*б*): y = 35 (*1*), 40 (*2*), 45 (*3*), 50 (*4*)

Ограничимся рассмотрением случая числа Пекле Pe = 500. Будем рассматривать процесс заполнения канала в течение 20 безразмерных единиц, что обеспечивает формирование установившейся формы свободной поверхности. Характер изменения параметра χ, вычисленного в момент окончания расчета, в зависимости от W для различных значений числа Бринкмана демонстрируют кривые *3*, *4* (рис. 4.19, *а*). С ростом параметра Br жидкость в окрестности свободной границы прогревается сильнее, в результате чего ее вязкость падает, что приводит к формированию более пологих форм свободной поверхности. При этом рост значения параметра W приводит к большим максимальным температурам в области фонтанирующего течения (рис. 4.19, *б*).

Интенсивность вязкой диссипации в потоке определяется значением параметра Бринкмана – Br. На рис. 4.20 показано влияние этого параметра на характеристики течения при прочих равных условиях. Распределения температуры, вязкости, давления, диссипативной функции и составляющих вектора скорости представлены в момент времени t = 20. Градиент давления в большей части области, за исключением малой окрестности свободной поверхности, направлен параллельно стенке канала, а его модуль падает с ростом Br вследствие уменьшения вязкости.

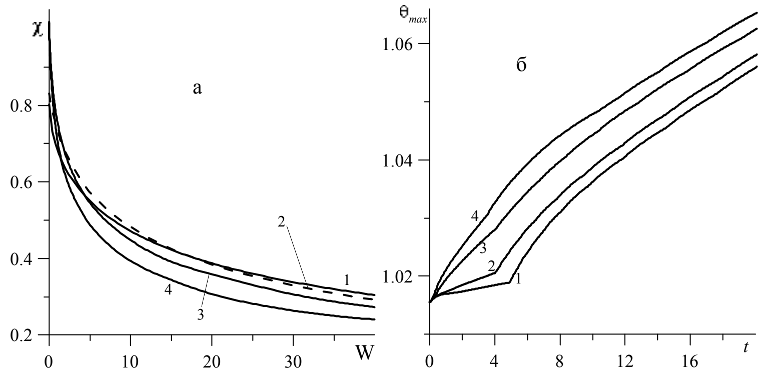


Рис. 4.19. Зависимость характеристики χ от W при Re = 0,01, Pe = 500 (*а*): *1* – изотермический случай, *2* – изотермический случай [43]; *3, 4* – Br = 1, 2; Изменение максимальной температуры в области с течением времени при Re = 0,01, Pe = 500, Br = 2 (*б*): *1, 2, 3, 4* – W = 0, 1, 10, 40

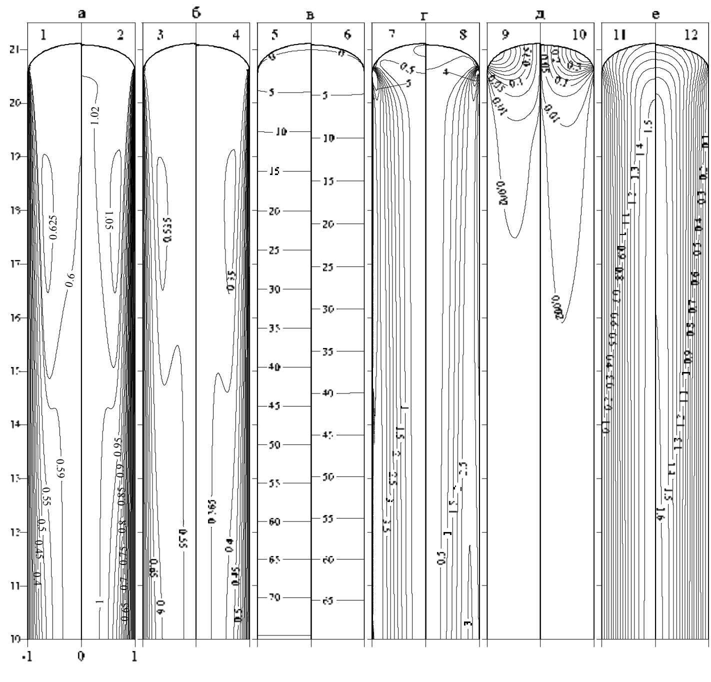


Рис. 4.20. Изолинии θ (*а*), η (*б*), *p* (*в*), Φ (*г*), *u* (*д*) и *v* (*е*) при Re = 0,01, W = 5, Pe = 500: Br = 1 (*1, 3, 5, 7, 9, 11*), 2 (*2, 4, 6, 8, 10, 12*)

Диссипативная функция достигает максимальных значений в окрестности линии трехфазного контакта, однако генерируемое тепло отводится через твердую стенку. В области одномерного течения максимальная диссипация энергии наблюдается около стенки, где реализуются наибольшие скорости сдвига. Увеличение числа Br в рассматриваемом диапазоне не приводит к качественным изменениям структуры течения.

Размер области двумерного течения увеличивается с ростом параметра Br. Наблюдается незначительное увеличение температуры в окрестности свободной поверхности. С уменьшением вязкости интенсивность растекания жидкости к твердым стенкам в окрестности свободной границы растет, поэтому значение χ уменьшается с увеличением Br.

Зависимости безразмерной длины зоны двумерного течения l_{2D} от W для изотермического и неизотермического случаев показаны на рис. 4.21. Значение представленной характеристики асимптотически стремится к постоянной величине с увеличением W. Изменение длины участка фонтанирующего течения в неизотермическом случае демонстрируют кривые *2*, *3*.

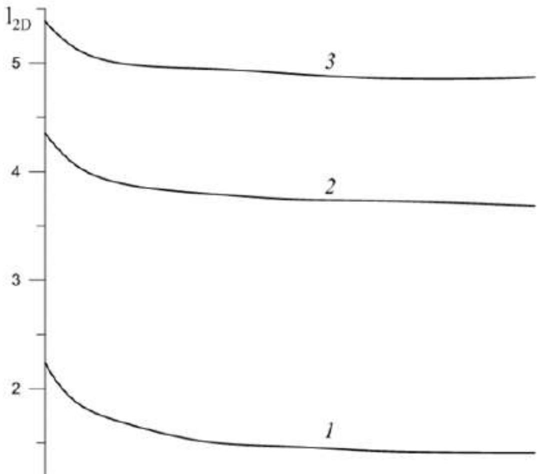


Рис. 4.21. Длина зоны двумерного течения при Re = 0,01, Pe = 100: *1*–*3* – Br = 0; 1,33; 2,66

Наряду с рассмотренной постановкой задачи реализуется математическая модель, в которой на входной границе задается параболический профиль продольной скорости, соответствующий одномерному изотермическому течению, а температура задается равной температуре стенки. В качестве начальных условий используются нулевые распределения скорости и температуры. Изменение поля температуры с течением времени в окрестности свободной поверхности представлено на рис. 4.22 и 4.23 для двух значений числа Пекле. Жидкость поступает в канал с нулевой температурой и с течением времени прогревается за счет вязкой диссипации. В момент времени $t = 50$ во всей области наблюдается двумерное распределение температуры.

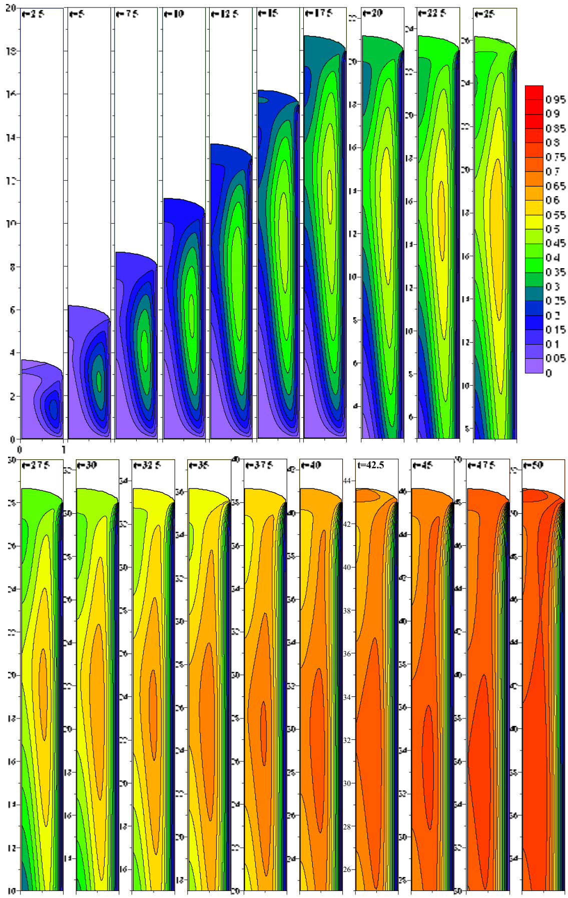


Рис. 4.22. Эволюция поля температуры во времени, Re = 0,01, Pe = 50, W = 2, Br = 2

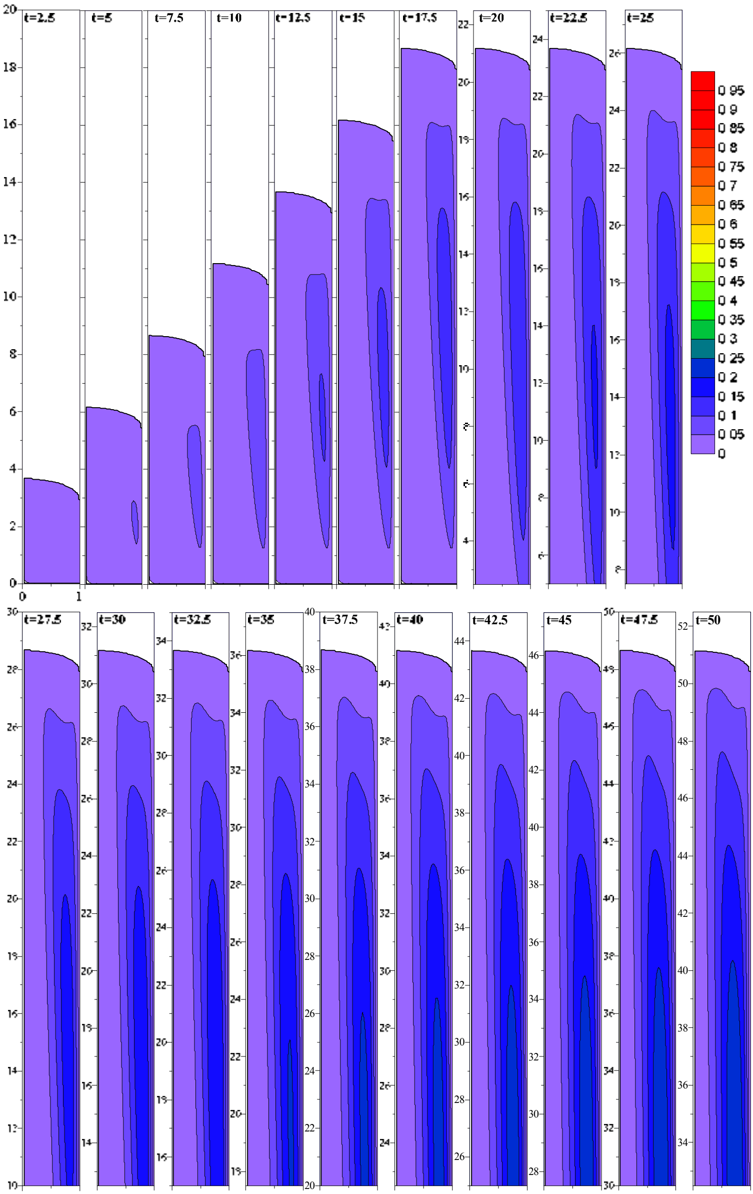


Рис. 4.23. Эволюция поля температуры во времени, Re = 0,01, Pe = 1000, W = 2, Br = 2

Изменения характеристик χ и θ_{max} с течением времени представлены на рис. 4.24. Так же, как и в первом варианте задания начальных и граничных условий, величина χ устанавливается к моменту $t = 5$ и далее практически не изменяется для больших значений числа Pe. Однако значение максимальной температуры в области θ_{max} меняется уже не по линейному закону.

Поля температуры, вязкости, давления и скорости в этом случае в момент времени $t = 50$ для двух значений параметра Бринкмана при прочих равных условиях показаны на рис. 4.25. Поступающая в канал жидкость разогревается за счет вязкой диссипации, зона повышенной температуры формируется на некотором удалении от твердой стенки, где диссипативная функция достигает наибольших значений. В окрестности свободной поверхности среда прогревается незначительно. Согласно кинематике фонтанирующего течения и преобладания конвективного механизма переноса тепла, энергия, генерируемая вязкой диссипацией, уносится к твердым стенкам. При этом жидкость, поступающая в эту область, имеет низкую температуру.

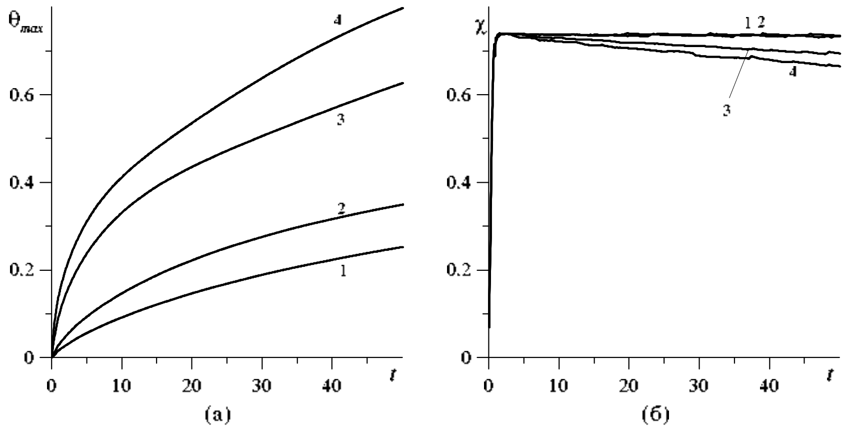


Рис. 4.24. Зависимость θ_{max} и χ от времени, Re = 0,01, W = 2, Br = 2:
1, 2, 3, 4 – Pe = 1000, 500, 100, 50

Хотя распределение температуры и вязкости двумерное во всей области движения, распределение кинематических характеристик можно разделить на зону одномерного и фонтанирующего течения. В области одномерного течения поперечная скорость близка к нулю (рис. 4.25, *д*). Предположив, что двумерное течение начинается с сечения, в котором максимальная поперечная скорость достигает значения 0,001, то при Br = 1 поперечный размер зоны l_{2D} равен 2,18, при Br = 8 l_{2D} = 7,49. Это заключение подтверждает распределение изобар, которые практически параллельны на некотором удалении от свободной границы. Видно, что для различных значений параметра Br распределения качественно совпадают, но имеются количественные различия.

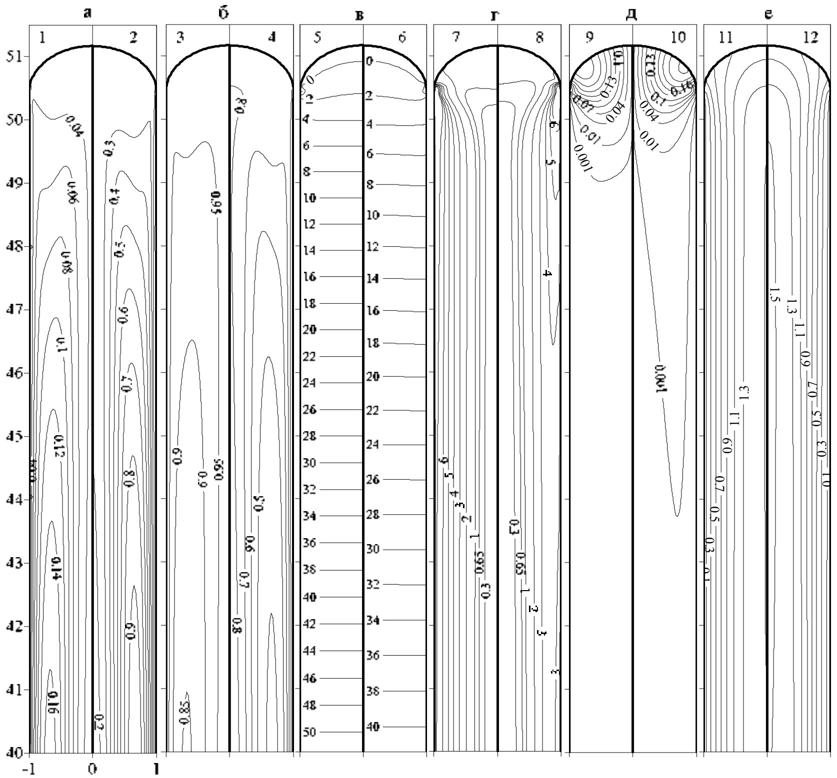


Рис. 4.25. Изолинии θ (*а*), η (*б*), *p* (*в*), Φ (*г*), *u* (*д*) и *v* (*е*) при Re = 0,01, W = 2, Pe = 500, Br = 1 (*1, 3, 5, 7, 9, 11*), 8 (*2, 4, 6, 8, 10, 12*)

Профили температуры и скорости в сечениях x_2 = const в момент времени t = 50 для разных значений Br при прочих равных условиях представлены на рис. 4.26, 4.27 соответственно. Наибольшие температуры реализуются на небольшом удалении от стенки, где наблюдаются большие значения диссипативной функции. В центре канала жидкость прогревается медленно ввиду малой диссипации в этой зоне и преобладания конвективного механизма переноса тепла. Для обоих значений параметра

Бринкмана наблюдаются согласования качественного поведения профилей температуры в различных сечениях канала, несмотря на сильное количественное отличие. При этом профили скорости в различных сечениях к данному моменту времени меняются незначительно.

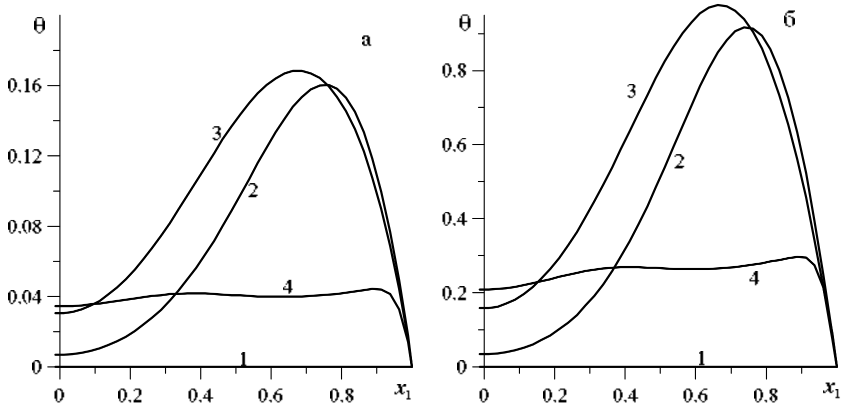


Рис. 4.26. Распределение температуры в сечениях y = const
при Re = 0,01, W = 2, Pe = 500; Br = 1 (*а*), Br = 8 (*б*); y = 0 (*1*), 20 (*2*), 30 (*3*), 50 (*4*)

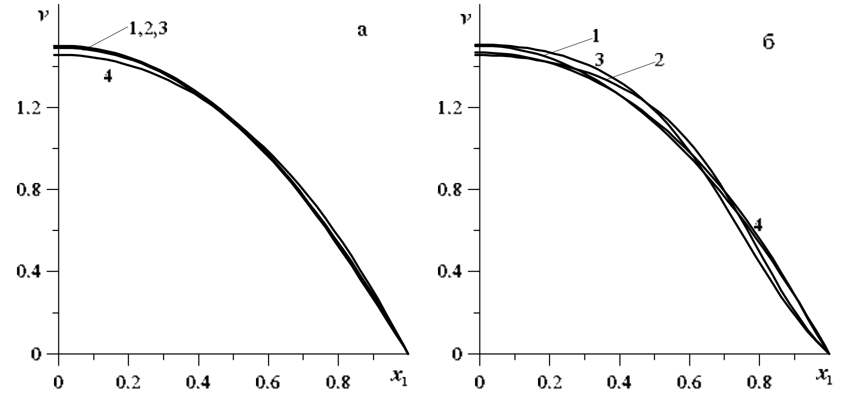


Рис. 4.27. Распределение продольной скорости в сечениях y = const при
Re = 0,01, W = 2, Pe = 500; Br = 1 (*а*), Br = 8 (*б*); y = 0 (*1*), 20 (*2*), 30 (*3*), 50 (*4*)

Картина течения для этого случая в подвижной системе координат демонстрируется на рис. 4.28, *б*, *в* и отличается от изотермического случая (рис. 4.28, *а*). Картина распределений линий тока для неизотермического течения предполагает волнообразные траектории движения жидких частиц, попадающих в зону катящегося движения жидкого объема. Интенсивность такого движения растет с увеличением параметра Br, характеризующего относительную эффективность диссипативного разогрева.

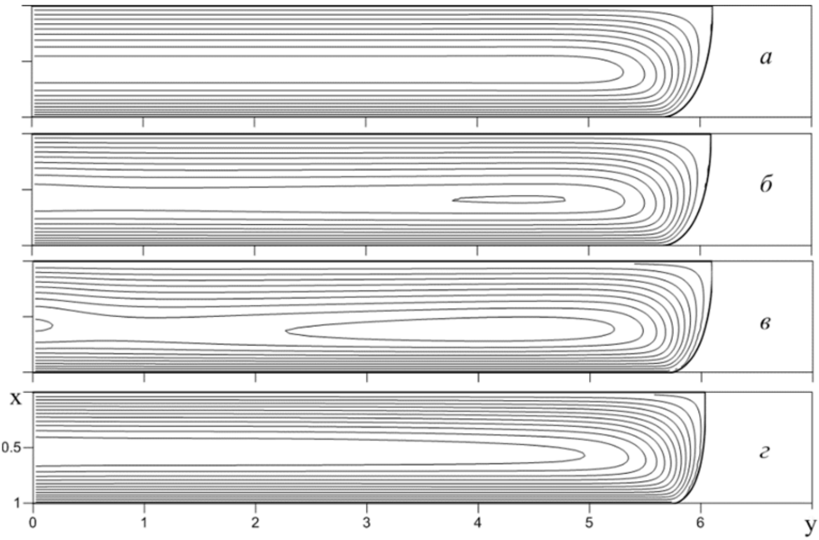


Рис. 4.28. Линии тока в подвижной системе координат при Re = 0,01, W = 10, Pe = 100:
а – изотермический случай; *б*, *г* – Br = 2,66; *в* – Br = 13,3

Влияние значения числа Пекле на характер распределения температуры и вязкости в потоке в момент времени $t = 5$ отображено на рис. 4.29. Усиление конвективной составляющей переноса также проявляется в изменении температуры и вязкости. Таким образом, в рамках данной постановки задачи для выбранных значений определяющих параметров картина течения отличается от таковой, полученной для первой математической модели.

Однако если в рамках второй постановки задачи при значениях определяющих параметров, допускающих существование стационарного решения, предположить установление квазистационарного режима заполнения, то при достаточно больших временах в передней части потока, по-видимому, сформируется течение, описываемое в рамках первоначальной постановки. По крайней мере расчеты подобного течения в канале без учета свободной границы при получении стационарного решения (рис. 4.11 и 4.12) и исследования в рамках первой математической постановки задачи дают основание для такого предположения. Действительно, выполненные расчеты подтверждают сделанное предположение. На рис. 4.30 представлены распределения температуры, полученные в рамках первой (рис. 4.30, *a*) и второй (рис. 4.30, *b*) постановок задачи. В верхней части потока для второй постановки задачи на длине, равной нескольким масштабным единицам, формируются распределение температуры и как следствие распределение вязкости и картина течения, совпадающие с таковыми, полученными с использованием первой постановки.

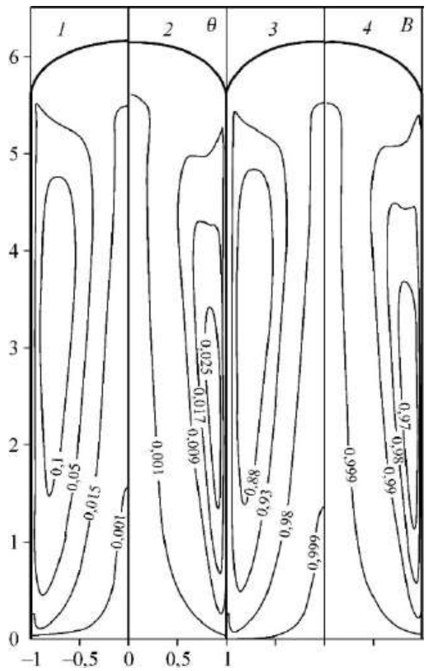


Рис. 4.29. Изолинии температуры и вязкости при
Re = 0,01, W = 2, Br = 1.33, Pe = 100 (*1*, *3*), 1000 (*2*, *4*)

Для качественной оценки влияния неизотермичности на движение жидкости при заполнении используются частицы-маркеры, которые равномерно размещаются во входном сечении. Эти частицы перемещаются вместе с жидкостью, образуя в потоке некоторую реперную поверхность [103, 182]. Эволюция реперной поверхности со временем в изотермических и неизотермических условиях показана на рис. 4.31.

Характер деформации реперной поверхности качественно согласуется с имеющимися экспериментальными данными, где окрашенные частицы используются для визуализации потока [110, 116, 182]. Слева от линии симметрии на графиках рис. 4.31 показаны результаты для неизотермического случая с нулевыми начальными условиями для температуры, справа – с начальными условиями, использующими стационарное решение.

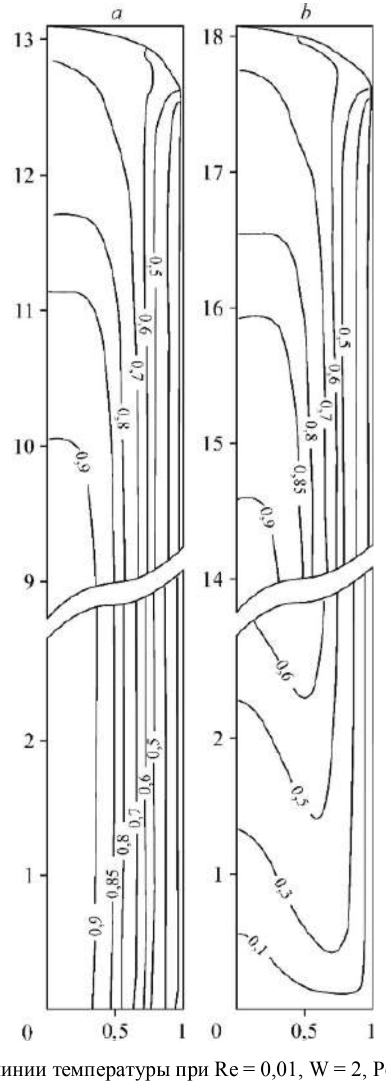


Рис. 4.30. Изолинии температуры при Re = 0,01, W = 2, Pe = 5, Br = 2,66

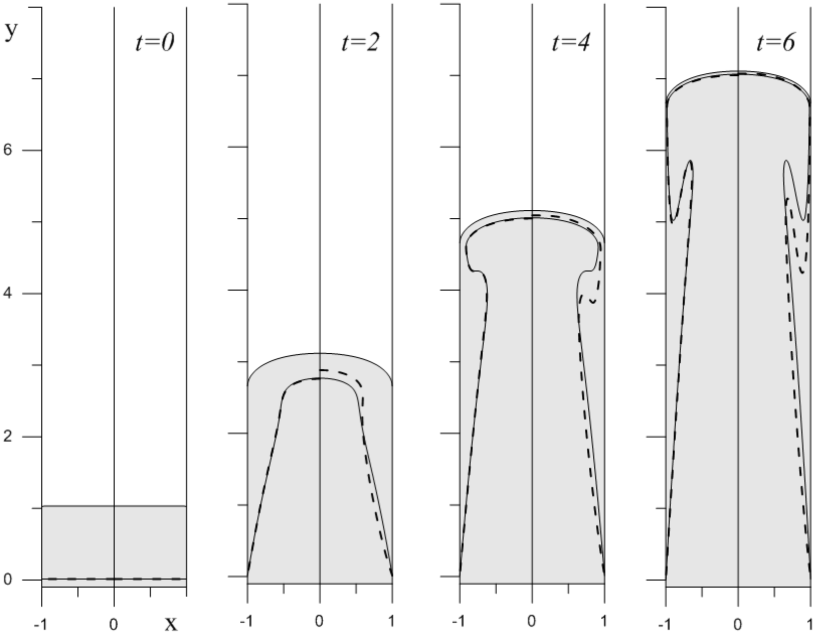


Рис. 4.31. Эволюция реперной линии при Re = 0,01, W = 10, Pe = 100, Br = 2,66

Сравнение деформирования реперной поверхности в различных условиях в левых частях рисунков показывает, что, несмотря на качественное различие распределений линий тока (рис. 4.28, *а*, *в*), количественные отличия незначительны. Более заметная разница результатов в правых частях рисунков связана с существенным количественным несовпадением профилей скорости для изотермического и неизотермического стационарных течений.

4.5. Результаты расчетов неизотермического течения степенной жидкости

Математическая постановка задачи содержит пять параметров (Re, W, *m*, Pe, Br), в связи с чем проведение параметрических исследований – довольно сложная задача. Ограничимся рассмотрением случаев малых чисел Рейнольдса Re = 0,1 и чисел Пекле Pe = 100.

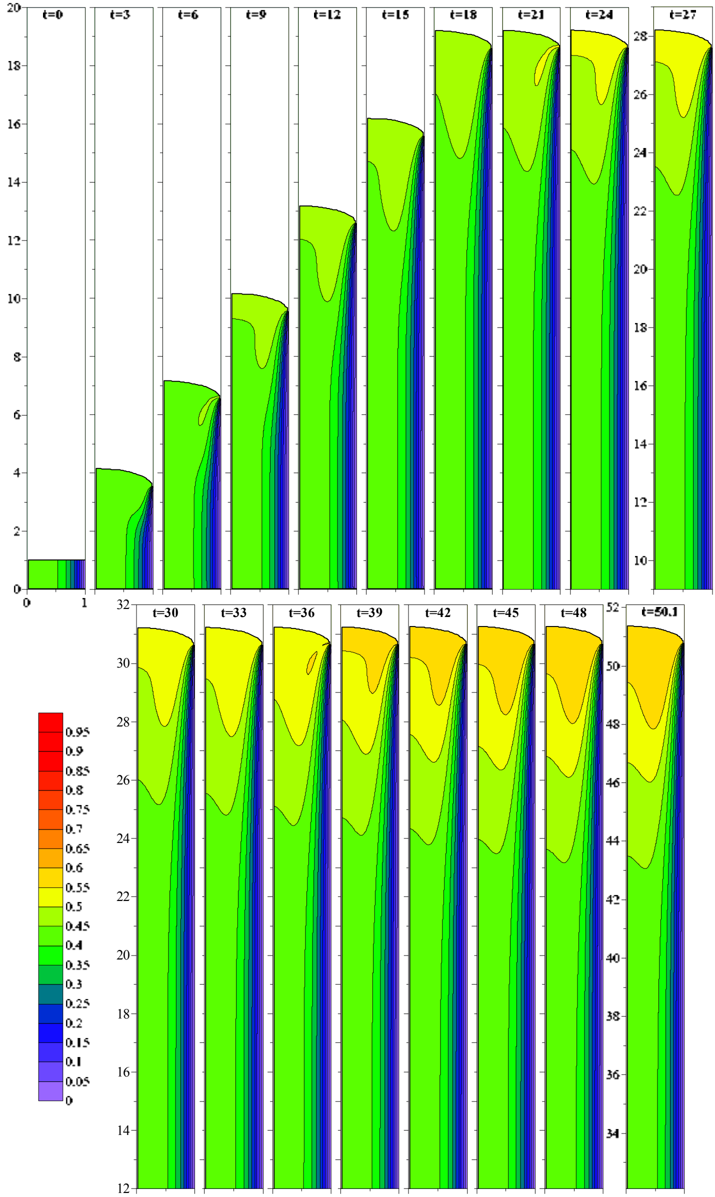


Рис. 4.32. Эволюция поля температуры, Re = 0,1, W = 2, *m* = 0,6, Pe = 100, Br = 1

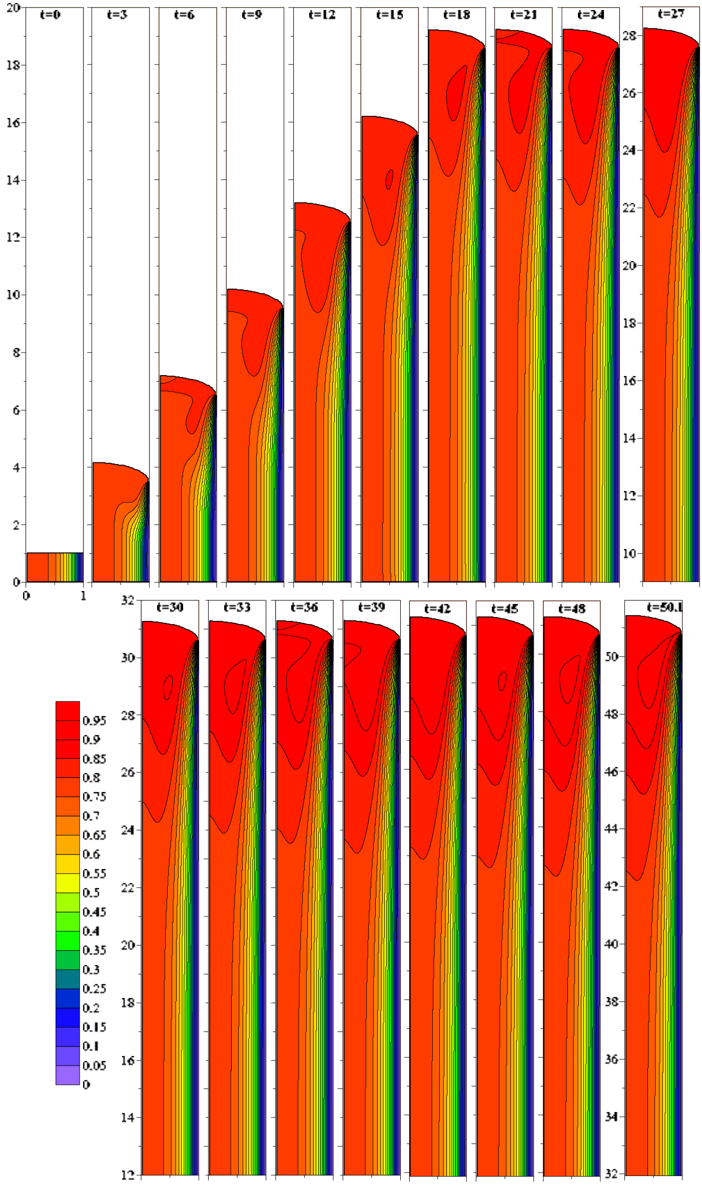


Рис. 4.33. Эволюция поля температуры, Re = 0,1, W = 2, m = 1,4, Pe = 100, Br = 1

Кинематическая и тепловая картина процесса заполнения демонстрирует разделение потока на две характерные зоны аналогично изотермическому случаю. В окрестности свободной поверхности реализуется зона двумерного течения, в остальной части канала течение имеет одномерный характер с распределениями температуры и скорости, соответствующими установившемуся течению. Распределение температуры в зоне двумерного движения с течением времени представлено на рис. 4.32 и 4.33 для случаев псевдопластичной и дилатантной сред. На начальном этапе на некотором удалении от свободной границы формируется зона локального максимума температуры. Далее рост температуры в этой зоне продолжается наряду с ростом ее размеров.

На рис. 4.34 представлены значения параметра χ и максимальной температуры в области θ_{max} с течением времени. Видно, что к моменту времени t = 5 форма поверхности устанавливается и далее меняется слабо. Максимальная температура в начальный момент времени реализуется на линии симметрии. С течением времени максимум перемещается в зону фонтанирующего течения, где образуется зона локального максимума, а значение θ_{max} постепенно увеличивается. Анализ кинематических характеристик показывает, что их распределения устанавливаются на начальном этапе деформации свободной поверхности и практически не меняются после ее установления в отличие от теплофизических характеристик.

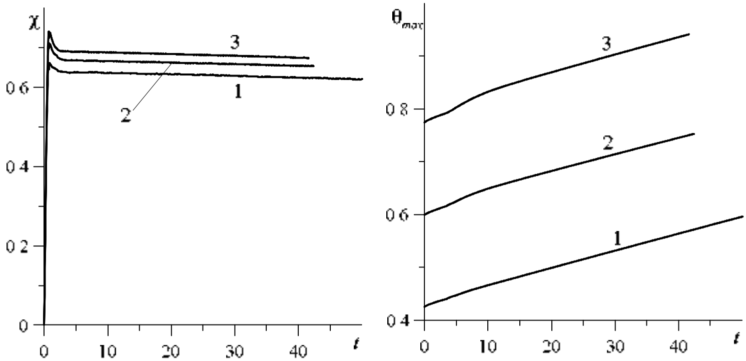


Рис. 4.34. Изменение параметра χ и температуры θ_{max} с течением времени, Re = 0,01, W = 0, Pe = 500, Br = 1: *1*, *2* – m = 0,8; 1,2

Распределения характеристик течения в момент времени t = 50,1 представлены на рис. 4.35. Анализ картины течения показывает, что размеры зоны двумерного распределения для кинематических характеристик значительно меньше, чем для теплофизических. На расстоянии порядка двух безразмерных единиц от свободной поверхности поле температуры еще имеет двумерный характер, а распределение скорости практически не отличается от одномерного установившегося течения в плоском бесконечном канале, что демонстрирует рис. 4.36, на котором представлены профили компонент скоростей и температуры в поперечных сечениях, проведенных на различных расстояниях *l* от свободной границы. Поле давления в потоке качественно совпадает со случаем течения степенной жидкости в изотермических условиях. В области одномерного течения формируется постоянный градиент, направленный параллельно стенкам канала, а в окрестности свободной границы реализуется область пониженного давления.

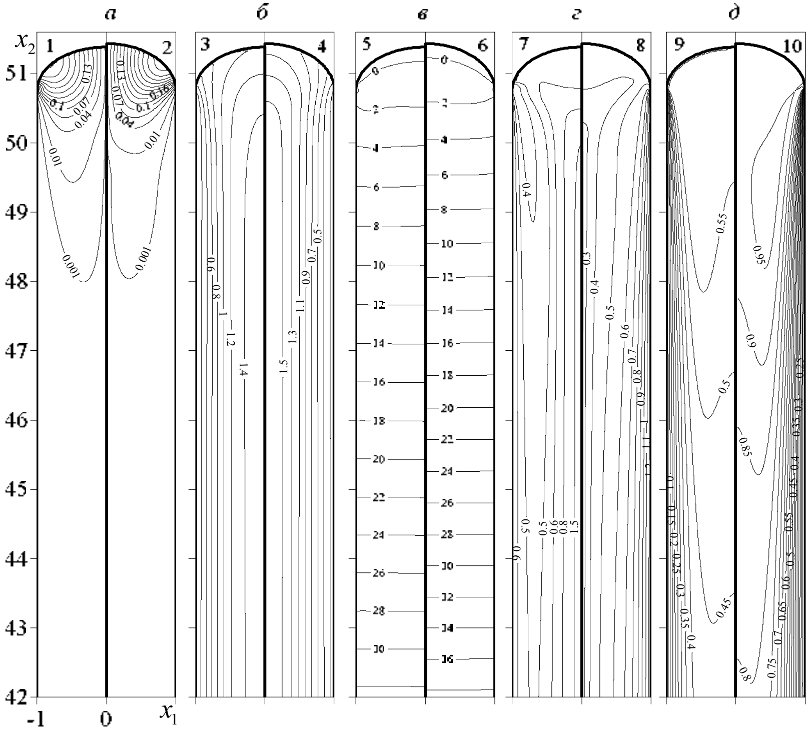


Рис. 4.35. Распределение поперечной (*а*) и продольной (*б*) скоростей, давления (*в*), вязкости (*г*) и температуры (*д*), Re = 0,1, W = 2, Pe = 100, Br = 1:
1, 3, 5, 7, 9 – m = 0,6; *2, 4, 6, 8, 10* – m = 1,4

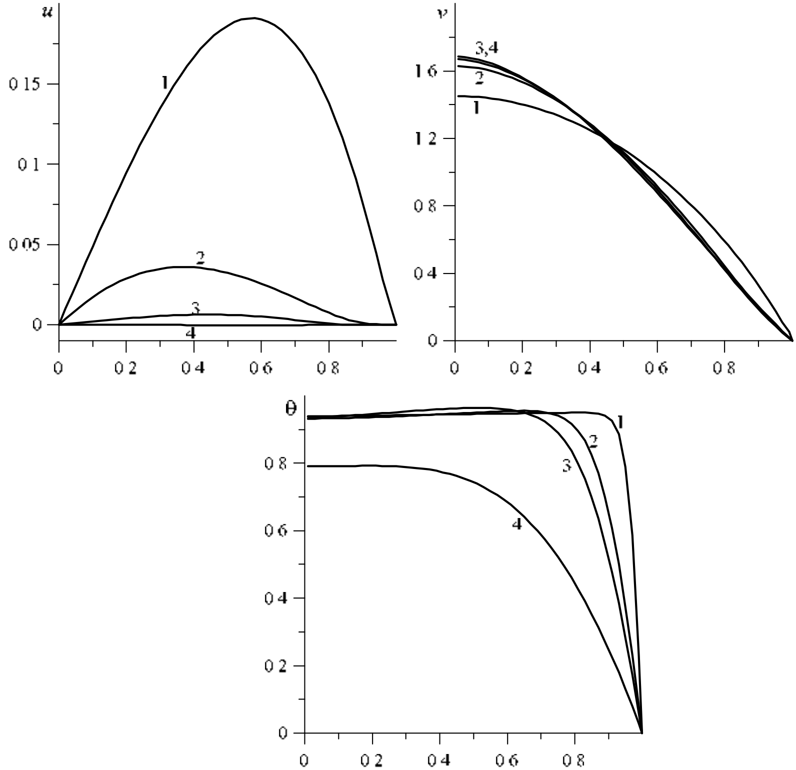


Рис. 4.36. Распределения скоростей u, v и температуры θ в поперечных сечениях,
Re = 0,1, W = 2, m = 1,4, Pe = 100, Br = 1: *1, 2, 3, 4* – l = 0,7; 1,2; 1,7; 10

Количественную оценку размеров зон двумерного течения показывает рис. 4.37, на котором представлены зависимости характеристик вдоль линии симметрии канала. Предполагая, что зона двумерного распределения кинематических характеристик начинается с сечения x_2 = const, в котором максимальное значение поперечной скорости достигает величины 0,01, а теплофизических – с сечения, в котором температура на линии симметрии на 1% отличается от соответствующего значения во входном сечении, длины областей двумерного распределения l_{2D} определяем как расстояние от вершины фронта потока до этих сечений. В момент времени t = 50,1 размеры гидродинамической зоны составляют 1,94 и 1,57 при m = 0,6 и 1,4, а теплофизической больше почти на порядок и равны 21,92 и 12,45 соответственно.

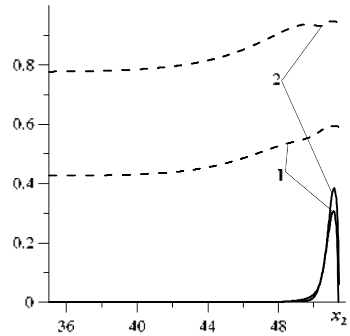


Рис. 4.37. Зависимость θ на линии симметрии (пунктирная линия) и максимальной скорости *u* в поперечном сечении (сплошная линия) от x_2, Re = 0,1, W = 2, Pe = 100, Br = 1: *1*, *2* – *m* = 0,6; 1,4

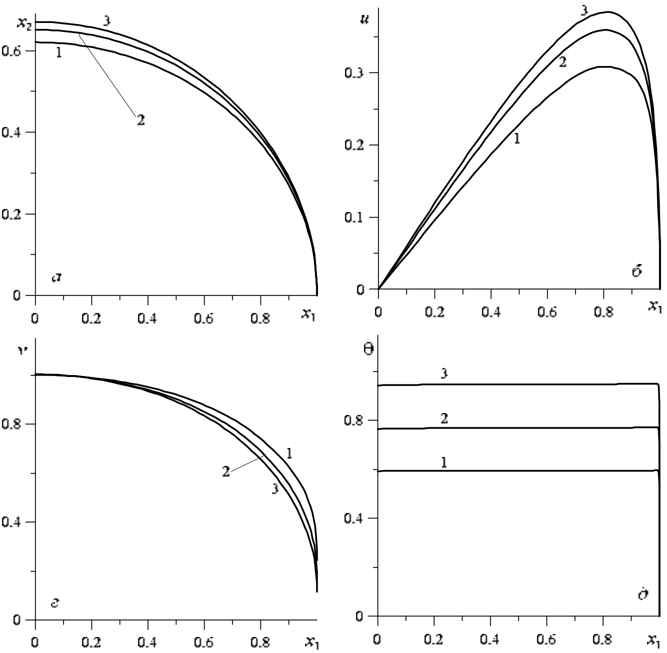


Рис. 4.38. Форма свободной границы (*а*) и распределение *u* (*б*), *v* (*в*) и θ (*г*) вдоль нее, Re = 0,01, W = 0, Pe = 500, Br = 1: *1, 2, 3* – *m* = 0,8; 1; 1,2

Установившиеся формы свободной поверхности, распределения скоростей и температуры на ней представлены на рис. 4.38 для различных степеней нелинейности. Кинематика свободной границы качественно не отличается от случая изотермического заполнения, в результате с ростом параметра нелинейности m наблюдается увеличение параметра χ. Температура вдоль всей границы практически не меняется за исключением малой окрестности около линии контакта, где она резко падает до значения, соответствующего температуре стенки.

4.6. Моделирование процесса заполнения канала вязкопластичной жидкостью с учетом вязкой диссипации и зависимости реологических параметров от температуры

Рассмотрим неизотермическое заполнение плоского канала вязкопластичной жидкостью Шведова–Бингама с учетом зависимости реологических параметров от температуры. Течение описывается системой (4.1), дополненной выражением для эффективной вязкости (4.2) при $m = 1$. Во входном сечении профили скорости и температуры соответствуют установившемуся неизотермическому течению рассматриваемой жидкости в канале с заданным постоянным расходом, характерный вид которых представлен на рис. 4.8.

С течением времени первоначально плоская свободная поверхность приобретает выпуклую форму и перемещается вдоль канала со среднерасходной скоростью. Изменение характеристики χ и максимальной температуры по области с течением времени представлено на рис. 4.39. Приблизительно к моменту времени $t = 3$ характеристика формы свободной границы практически устанавливается и далее изменяется слабо.

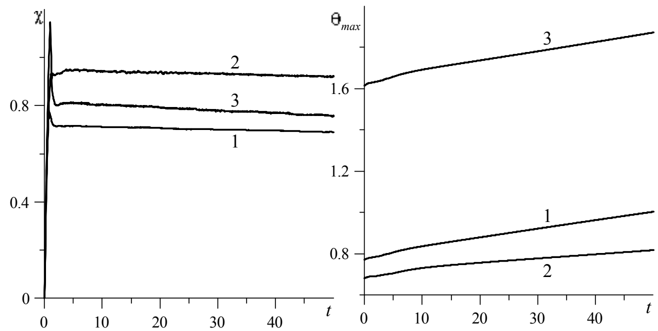


Рис. 4.39. Изменение параметра χ и температуры θ_{max} с течением времени, Re = 0,01, W = 2, Pe = 100, β = 1: *1* – Br = 1, Bn = 1; *2* – Br = 0,5, Bn = 4; *3* – Br = 1, Bn = 6

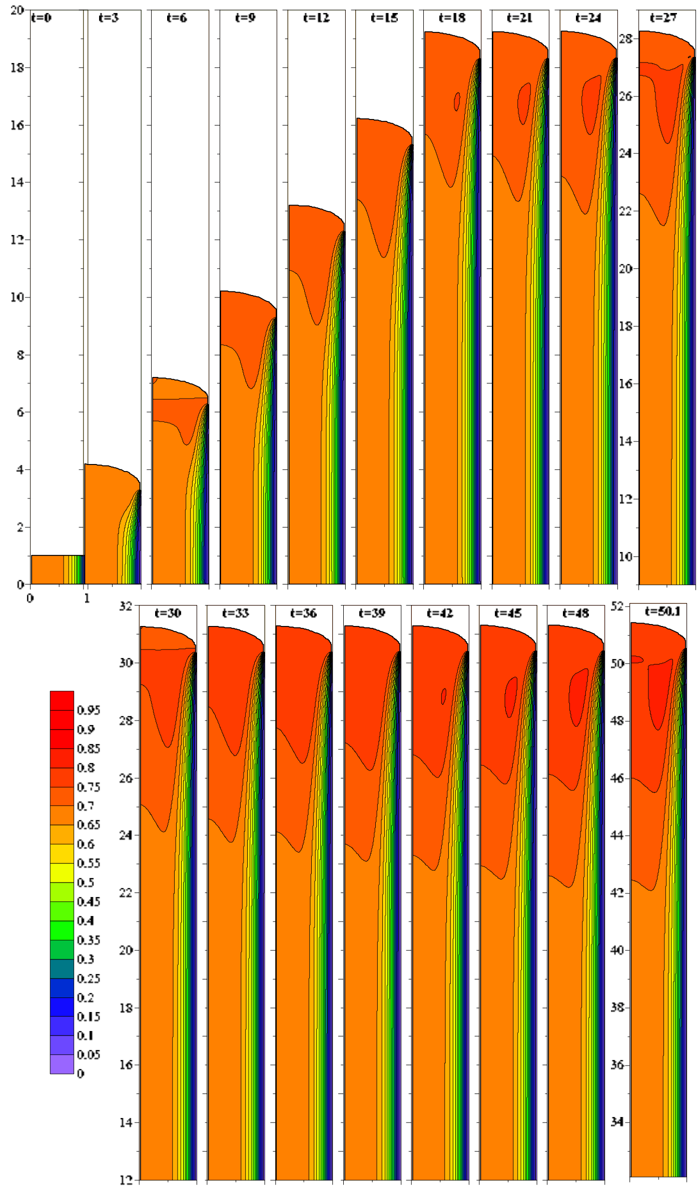


Рис. 4.40. Эволюция поля температуры, Re = 0,1, W = 2, Pe = 100, Br = 0,5, Bn = 4

Эволюция поля температуры представлена на рис. 4.40. Вдали от свободной поверхности реализуется одномерное течение, при этом тепловой поток через боковые стенки за единицу времени соответствует теплу, выделившемуся за счет вязкой диссипации. В зоне фонтанирующего течения жидкость постепенно прогревается за счет вязкой диссипации на рассматриваемом временном интервале. Эволюция поля температуры качественно совпадает со случаями ньютоновской и псевдопластичной жидкостей.

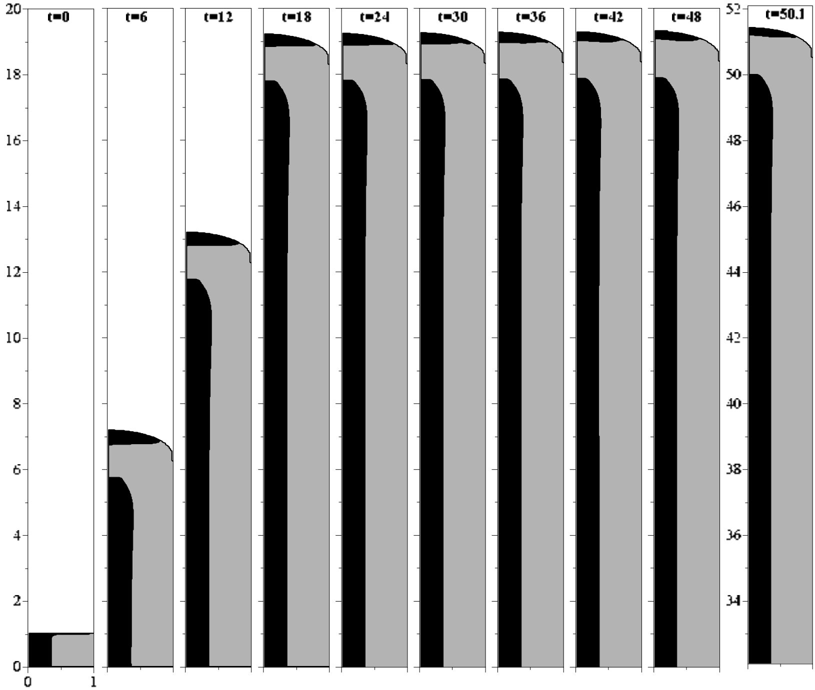


Рис. 4.41. Распределение зон квазитвердого движения в потоке с течением времени, Re = 0,1, W =2, Pe = 100, Br = 0,5, Bn = 4

На рис. 4.41 показана эволюция местоположения зон квазитвердого движения. На начальном этапе деформации свободной поверхности в области формируется структура потока, характеризующаяся наличием квазитвердых ядер к моменту времени $t = 3$, далее она не претерпевает сильных изменений. Для выбранных параметров реализуется режим течения с двумя ядрами: в окрестности свободной поверхности и на некотором расстоянии от нее в области линии симметрии. Аналогичный режим наблюдался для изотермического случая. С течением времени размеры ядра, включающего свободную границу, медленно уменьшаются вследствие изменения эффективной вязкости за счет прогрева жидкости в области фонтанирующего течения, а размеры центрального ядра увеличиваются в продольном направлении по мере продвижения фронта свободной поверхности вдоль канала.

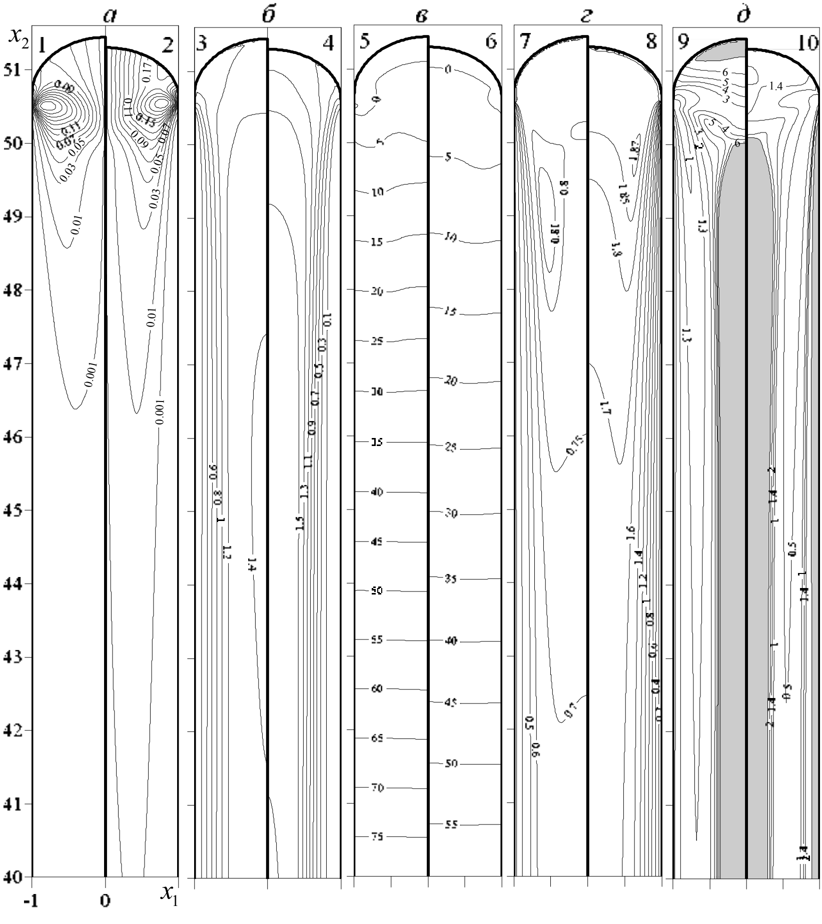


Рис. 4.42. Распределение поперечной (*а*) и продольной (*б*) скоростей, давления (*в*), температуры (*г*) и вязкости (*д*), Re = 0,1, W = 2, Pe = 100:
1, 3, 5, 7, 9 – Br = 0,5, Bn = 4; *2, 4, 6, 8, 10* – Br = 1, Bn = 6

Распределения характеристик потока в области фонтанирующего движения представлены на рис. 4.42 для двух наборов параметров. Видно, что зона двумерного течения увеличивается в продольных размерах по сравнению с изотермическим случаем, хотя качественно кинематика течений согласуется. На рис. 4.42, *д* представлены изолинии эффективной вязкости и зоны с уровнем напряжения, меньшим предела текучести, которые выделены серой сплошной заливкой. В зависимости от значений определяющих параметров реализуются различные структуры течений. При Br = 0.5, Bn = 4 в потоке образуются два квазитвердых ядра на свободной поверхности и на некотором удалении от нее в окрестности линии симметрии. При Br = 1, Bn = 6 течение характеризуется одним ядром на линии симметрии и застойной зоной на твердой стенке. Распределение температуры в квазитвердых ядрах изменяется. В застойной зоне жидкость покоится, диссипативная функция равна нулю, при этом через нее отводится тепло, генерируемое в сдвиговом течении.

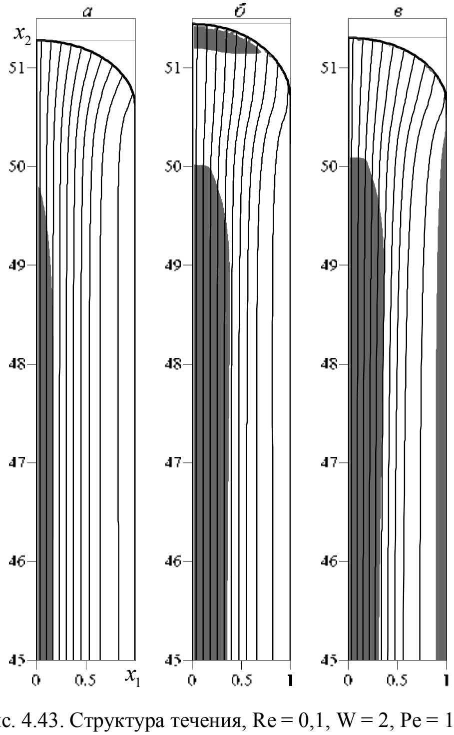


Рис. 4.43. Структура течения, Re = 0,1, W = 2, Pe = 100:
а – Br = 1, Bn = 1; *б* – Br = 0,5, Bn = 4; *в* – Br = 1, Bn = 6

Характерные структуры потока демонстрирует рис. 4.43, на котором представлены линии тока и местоположение зон с уровнем напряжения ниже предела текучести. Первая структура характеризуется одним квазитвердым ядром в окрестности линии симметрии (рис. 4.43, *а*). На рис. 4.43, *б* приведена вторая структура с ядром на свободной поверхности и на линии симметрии. Третья структура характеризуется ядром на линии симметрии и застойной зоной на твердой стенке.

Таким образом, показано, что учет вязкой диссипации и зависимости реологических параметров от температуры среды приводит к качественному изменению структуры потока вязкопластичной жидкости при заполнении плоского канала. При определенных значениях параметров реализуется режим с образованием застойной зоны около стенки. Формирование формы свободной поверхности происходит на начальном этапе, а далее она изменяется слабо. При этом в области можно выделить зону двумерного течения в окрестности свободной поверхности, максимальная температура в которой увеличивается на рассматриваемых временных интервалах. Вдали от поверхности реализуется одномерное течение.

ГЛАВА 5. Капиллярные эффекты при заполнении круглой трубы вязкой жидкостью в поле силы тяжести

Процессы растекания и смачивания распространены в природе и в различных отраслях промышленности. Например, в технологиях нанесения покрытий, печати и т.п. Несмотря на многочисленные исследования, выполненные за последние десятилетия, механизм взаимодействия жидкости с твердым телом на линии трехфазного контакта остается до конца не понятным. Несовместимость естественных граничных условий на свободной поверхности и условия прилипания на твердой стенке приводят к сингулярности динамических характеристик на линии контакта и проблеме определения динамического краевого угла [32, 33]. В работе [75] показано, что использование условия проскальзывания на некотором участке стенки в окрестности контакта устраняет отмеченную сингулярность.

Процесс взаимодействия фаз происходит на масштабах от макроскопического до молекулярного. Возможности физического измерения его параметров ограничены разрешением порядка нескольких микрон. Основными параметрами, используемыми для количественной оценки динамики смачивания, являются скорость U_{cl}, с которой линия контакта движется вдоль твердого тела, и динамический контактный угол θ_d, т.е. угол, образованный между касательной к границе движущейся жидкости и твердым телом. При этом значение θ_d зависит не только от U_{cl}, но и от направления движения фронта потока (набегающий, отступающий) [69, 225]. В настоящее время существует два подхода к теоретическому описанию механизма взаимодействия. Достаточно полные обзоры по моделям движения можно найти в работах [226–228].

Гидродинамическая теория выделяет три масштаба в окрестности контактной линии: микро-, мезо- и макроскопический (рис. 5.1, *а*). Предполагается, что микроскопический угол θ_m определяется межмолекулярными силами ближнего действия и сохраняет свое равновесное значение θ_s. Макроскопический угол θ_d, наблюдаемый в экспериментах, определяется кинематикой течения и свойствами жидкости. Во внешней области капиллярные и гравитационные силы уравновешивают друг друга, а на границе раздела жидкости справедлива формула Лапласа для определения капиллярного давления. Внутренняя область расположена в непосредственной близости от линии трехфазного контакта, где определяющую роль играют взаимодействия жидкость – жидкость и жидкость –

твердое тело. Традиционная гидродинамика сталкивается с трудностями в этой зоне, поэтому область вблизи ЛТК либо исключается из рассмотрения, либо предполагается, что жидкость проскальзывает на контактной линии, что устраняет сингулярность традиционной постановки задачи [32, 33]. В промежуточной области, разделяющей внутреннюю и внешнюю зоны, вязкие и капиллярные силы определяют характеристики течения и форму поверхности раздела жидкости. Геометрия системы влияет на профиль границы раздела жидкости во внешней области, но не влияет на форму свободной поверхности внутренней и промежуточной областей.

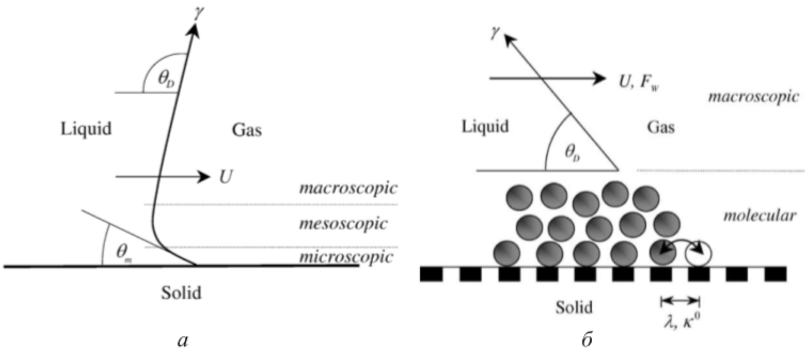


Рис. 5.1. Динамика контактной линии согласно гидродиномическому (a) и молекулярно-кинетическому ($б$) подходам [71]

В одной из первых работ [229] теоретически была получена следующая закономерность для динамического краевого угла в предположении малости равновесного угла

$$U_{cl} = c_T \theta_d^3, \tag{5.1}$$

где c_T – коэффициент, зависящий от свойств сред на линии контакта.

В работе [83] получена следующая приближенная формула при значениях динамического угла $\theta_d \le 3\pi / 4$:

$$U_{cl} = \frac{\sigma}{9\mu}\left(\theta_d^3 - \theta_m^3\right)\left[\ln\left(\frac{L}{L_s}\right)\right]^{-1}. \tag{5.2}$$

Здесь L и L_s – характерные макро- и микроскопические размеры области. При выводе последней формулы не рассматривались явления, происходящие на микроскопическом масштабе, где нарушается гипотеза сплошности среды. В работе [84] выполнено исследование аналогичной задачи с учетом скольжения жидкости вдоль твердой стенки в малой окрестности линии трехфазного контакта и установлен следующий факт. В разложении характеристик, описывающих поведение дальнего поля (на макроскопическом масштабе), в ведущем члене разложения важны только размер зоны скольжения и угол контакта. Это означает, что исследование физических процессов вблизи линии контакта возможно осуществлять путем проведения макроскопических измерений. Зачастую существующие технологии физического эксперимента не позволяют определить нужные параметры, поэтому численное моделирование с использованием подходов молекулярной динамики является альтернативным инструментом при исследовании характеристик течения вблизи линии контакта.

Молекулярно-кинетическая теория выделяет два масштаба: макроскопический и молекулярный. На молекулярном уровне в непосредственной близости от движущейся контактной линии рассматриваются диссипативные процессы за счет трения, т.е. присоединения или отрыва частиц жидкости (молекул) к или от твердой поверхности, как схематически показано на рис. 5.1, *б*. В исследованиях [230, 231] показано, что существует область вблизи линии контакта, в которой нарушается граничное условие прилипания. В [232] движение контактной линии определяется средним расстоянием λ между соседними положениями молекул и частотой перемещения k^0 по формуле

$$U_{cl} = 2k^0\lambda \sinh\left(\frac{\sigma\lambda^2\left(\cos\theta_s - \cos\theta_d\right)}{2k_B T}\right),$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – температура.

Исследования [233, 234] показывают, что для малых углов θ_d динамика ЛТК скорее всего будет описываться вязкой диссипацией, тогда как для больших углов трение на контактной линии будет играть основную роль. Попытки объединить описанные выше подходы выполнены в работах [235, 236]. Динамический угол, рассчитанный в молекулярно-кинетической теории, используется в качестве макроскопического угла θ_m в гидродинамической теории.

Теория, разработанная в [76, 237], предполагает наличие в окрестности контактной линии механизма вязкой диссипации из гидродинамического подхода и дополнительного механизма диссипации за счет перехода жидких элементов с границы жидкость – газ на границу жидкость – твердое тело (рис. 5.2). Последний описывается с использованием аппарата неравновесной термодинамики.

Большинство из этих моделей носят феноменологический характер. Все они нацелены на устранение сингулярности, но их физическое содержание и адекватность не совсем ясны. Таким образом, неясно какая модель лучше описывает реальные физические процессы вблизи линии контакта [238].

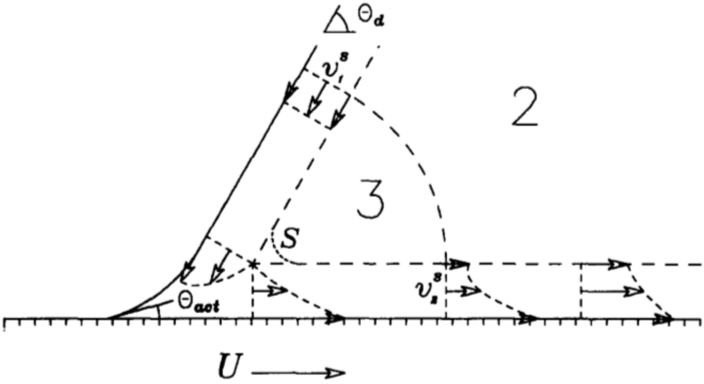


Рис. 5.2. Картина течения в окрестности линии трехфазного контакта [237]

Рядом исследователей были предложены модели динамики контактной линии, основанные на экспериментальных измерениях. Эти модели в качестве основного параметра используют капиллярное число, определяемое по скорости движения контактной линии формулой

$$\mathrm{Ca} = \frac{\mu U_{cl}}{\sigma}.$$

В работе [90] выполнены экспериментальные измерения динамического краевого угла при заполнении стеклянной капиллярной трубки для случая преобладания вязких и капиллярных сил над инерциальными и гравитационными. Измерения проводились в широком диапазоне изменения капиллярного числа ($4 \cdot 10^{-5} \leq \mathrm{Ca} \leq 36$), при этом динамический краевой угол менялся от нескольких градусов до 180. Его измерение проводилось визуально при помощи микроскопа. Результаты наблюдений аппроксимировались следующей функциональной зависимостью динамического угла от капиллярного числа и равновесного угла

$$\theta_d = f_H\left(\mathrm{Ca} + f_H^{-1}\left(\theta_s\right)\right),$$

где f_H^{-1} – функция обратная f_H. То есть динамический угол определяется капиллярным числом и неким сдвиговым фактором, зависящим от значения равновесного краевого угла. Однако явного математического выражения для функции f_H автор работы не приводит, его можно найти в работе [239]. В этой же работе для малых капиллярных чисел получена следующая приближенная формула:

$$\theta_d = 4{,}54\,\mathrm{Ca}^{0{,}353}. \tag{5.3}$$

Обобщая формулы (5.1)–(5.3), можно сделать вывод, что скорость контактной линии пропорциональна динамическому краевому углу в третьей степени. Такую пропорциональную зависимость называют законом Hoffman–Voinov–Tanner.

В работе [240] выполнено обобщение экспериментальных данных [90] и получена функциональная зависимость

$$\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1} = \tanh\left(4,96\mathrm{Ca}^{0,702}\right).$$

Исследования динамического угла при погружении пластины в глубокий бассейн с постоянной скоростью выполнены в [241], при этом измерялась сила, действующая на пластину. Динамический угол контакта затем рассчитывается из баланса сил, действующих на твердое тело. После обработки экспериментальных данных получена следующая эмпирическая формула:

$$\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1} = 2\sqrt{\mathrm{Ca}}.$$

Из последних двух формул видно, что разница косинусов динамического и равновесного углов является функцией капиллярного числа, при этом чем больше эта разница, тем больше скорость. Аналогичная идея используется в [242], где экспериментальные исследования проведены для случая $\mathrm{Ca} < 10^{-3}$ и получено аппроксимационное выражение вида

$$\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1} = 2.24\mathrm{Ca}^{0.54}.$$

В настоящее время описанные выше модели адаптированы для большинства численных алгоритмов решения задач со свободными границами. В работах [243–246] методом VOF решается задача о растекании сферической капли жидкости с использованием гидродинамического и молекулярного подходов для описания динамики контактной линии. Особенности расчета динамического краевого угла в случаях плоского и пространственного течения вязкой жидкости со свободной поверхностью методом VOF описаны в [247]. Аналогичный подход используется при численном решении задачи о растекании и движении капель вдоль твердой стенки с использованием смешанного лагранжева-эйлерова подхода с явным выделением фронта поверхности в [248, 249].

5.1. Постановка задачи

Рассматривается заполнение осесимметричного канала ньютоновской жидкостью в изотермических условиях в поле силы тяжести с учетом сил поверхностного натяжения. Область решения схематично изображена на рис. 5.3.

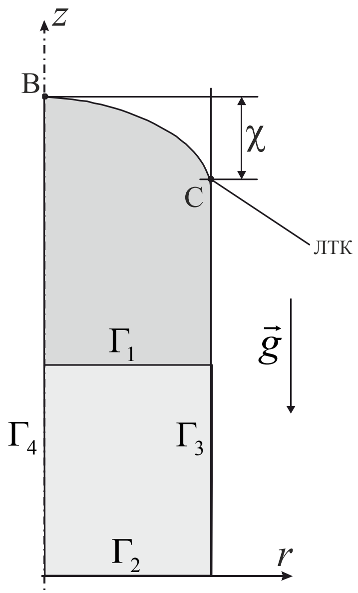


Рис. 5.3. Область решения

Течение описывается уравнениями движения и неразрывности, которые в безразмерных переменных в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1 u^2}{\partial x_1}+\frac{\partial uv}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\left[\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{u}{x_1^2}\right],$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{x_1}\frac{\partial x_1 uv}{\partial x_1}+\frac{\partial v^2}{\partial x_2}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\left[\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right]-W,$$

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}=0.$$

Здесь: t – время; u, v – проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат (r, z) соответственно; p – давление; $\mathrm{Re} = \rho UR / \mu$ – число Рейнольдса; $\mathrm{W} = \rho g R^2 / \mu U$ – безразмерный критерий, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил; ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; g – ускорение силы тяжести. В качестве масштабов обезразмеривания выбраны следующие величины: длины – радиус канала R; скорости – среднерасходная скорость во входном сечении U; давления – величина $\mu U / R$, времени – R / U.

На свободной границе Γ_1 в качестве граничных условий используются отсутствие касательного напряжения и равенство нормального сумме капиллярного и внешнего давлений, последнее без ограничения общности можно считать равным нулю. Капиллярным давлением p_L называют скачок давления на границе двух фаз, разделенных искривлённой поверхностью [250]. Математически давление определяется формулой Лапласа:

$$p_L = \sigma H,\ H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, H – кривизна поверхности, r_1, r_2 – главные радиусы кривизны.

Кроме того, свободная граница подчиняется кинематическому условию. На входной границе Γ_2 задается профиль аксиальной скорости, характерный для установившегося течения Пуазейля в бесконечной трубе, радиальная скорость равна нулю. На твердой стенке Γ_3 выполняется условие прилипания. На оси симметрии Γ_4 выполняется условие симметрии.

Таким образом, граничные условия, записанные в безразмерной форме, имеют следующий вид:

$$\Gamma_1 : \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{\partial v_s}{\partial s} = 0,\ p = 2\frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{H}{\mathrm{Ca}},$$

$$\Gamma_2 : u = 0,\ v = 2(1 - x_1^2),$$

$$\Gamma_3 : u = 0,\ v = 0,$$

$$\Gamma_4 : u = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

где v_n, v_s – нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности, $\mathrm{Ca} = \mu U / \sigma$ – капиллярное число, характеризующее соотношение вязких и поверхностных сил. Условия на границе Γ_1 записаны в локальной декартовой системе координат (n, s), нормально связанной со свободной поверхностью. Движение свободной границы осуществляется в соответствии с кинематическим условием, которое в лагранжевом представлении записывается в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = u,\ \ \frac{dx_2}{dt} = v.$$

Для течений жидкостей со свободной поверхностью характерной особенностью является наличие движущейся линии трехфазного контакта и изменяющегося во времени динамического краевого угла. В настоящем исследовании для описания динамики линии контакта используется соотношение Янга [240], которое связывает функциональной зависимостью равновесный и динамический краевые углы (θ_s и θ_d соответственно) и скорость контактной линии

$$\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1} = \tanh\left(4,96\mathrm{Ca}_{cl}^{0,702}\right). \tag{5.4}$$

Капиллярное число контактной линии определяется выражением $\mathrm{Ca}_{cl} = \mu\, U_{cl}/\sigma$, где U_{cl} – размерная скорость движения ЛТК вдоль твердой стенки. Формула (5.4) является обобщением эмпирической теории Хофмана [90]. В настоящей работе предполагается, что линия контакта перемещается за счет двух механизмов: скольжение жидкости в окрестности ЛТК вдоль твердой стенки и накатывание свободной поверхности на нее.

В начальный момент времени канал частично заполнен покоящейся жидкостью, и свободная граница расположена на достаточном удалении от входной границы Γ_2, чтобы исключить ее влияние на характер течения в окрестности последней.

5.2. Особенности расчета

Поставленная задача решается численно, с помощью методики, описанной в третьей главе. Рассмотрим подробно методику расчета кривизны H.

Построим поверхность, которая образуется путем вращения кривой $f(x_2)$, лежащей в плоскости x_1–x_2, вокруг оси x_2. Полученная поверхность является аналогом свободной границы, рассматриваемой в данном разделе. Тогда главные радиусы кривизн определяются формулами [251]

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{3/2}},\quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{f\left(1+f'^2\right)^{1/2}}.$$

Здесь

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx_2^2},\ f' = \frac{df}{dx_2}. \tag{5.5}$$

Расчет производных производится с использованием сглаживающего сплайна, построение которого описано в пункте 2.3.2 настоящей работы.

На рис. 5.4 представлены установившиеся формы свободной поверхности и соответствующие распределения кривизн, вычисленных с использованием сглаживающего сплайна (черные линии) и с привлечением разностного представления производных (5.5) (серые линии). Поверхность *2* рассчитана для малого значения капиллярного числа, т.е. в условиях преобладания поверхностных сил над вязкими, и ее форма близка к сферической. Значение динамического краевого угла близко к 180°, а радиус соответствующей сферы равен единице. Сумма главных кривизн поверхности остается постоянной за исключением окрестности линии трехфазного контакта. Видно, что способ расчета кривизны с использованием сплайна обеспечивает лучшие результаты. Поверхность *1* рассчитана также при малом капиллярном числе, установившееся значение динамического угла составляет 126°. Форма близка к сферической с радиусом, приблизительно равным 1,6, что согласуется с расчетными данными суммы главных кривизн. Для значений Ca = 1 свободная поверхность отличается от сферической и изменение кривизны вдоль поверхности имеет нелинейных характер (кривые *3*).

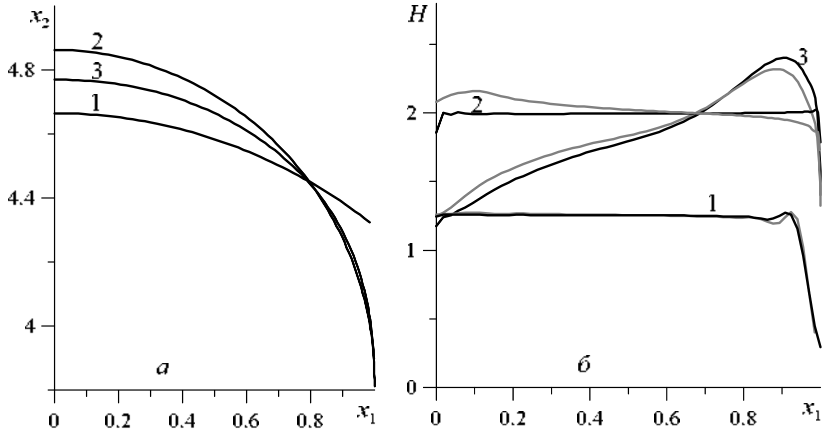


Рис. 5.4. Формы поверхности (*а*), суммы главных кривизн (*б*), Re = 0,1, W = 1:
1 – Ca = 0,01, θ_s = 120°; *2* – Ca = 0,01, θ_s = 175°; *3* – Ca = 1, θ_s = 120°

При построении сглаживающего сплайна необходимо задать величины ρ_i, определяющие максимальное отклонение сплайна от i-й узловой точки. Узловые точки совпадают с частицами-маркерами, которые определяют поверхность на дискретном уровне. В настоящей работе величины ρ_i одинаковые для всех точек. Влияние параметра ρ на значение рассчитываемой кривизны демонстрирует рис. 5.5. Для поверхности близкой к сферической (рис. 5.5, *а*) удовлетворительное согласование обеспечивает $\rho < 10^{-5}$, на большей части поверхности, исключая окрестность ЛТК, кривизна остается постоянной. Уменьшение ρ менее чем 10^{-6} практически не влияет на результаты в рассматриваемом диапазоне изменения определяющих параметров. Все расчеты, представленные в настоящей главе, проводились при $\rho = 10^{-6}$.

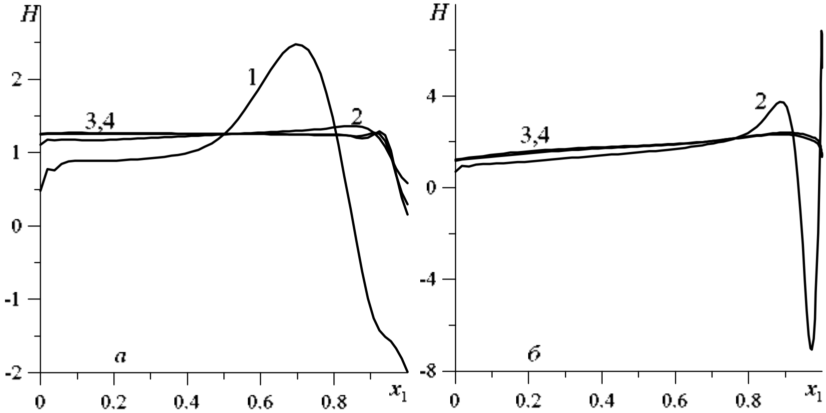


Рис. 5.5. Сумма главных кривизн, Re = 0,1, W = 1; *а* – Ca = 0,01, $\theta_s = 120°$; *б* – Ca = 1, $\theta_s = 120°$: *1, 2, 3, 4* – $\rho = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

Преобразуем выражение (5.4) к следующему виду:

$$\mathrm{Ca}_{cl} = \left[\frac{1}{4{,}96}\tanh^{-1}\left(\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1}\right)\right]^{\frac{1}{0{,}702}}. \tag{5.6}$$

В выражении капиллярного числа обезразмерим скорость, тогда

$$\mathrm{Ca}_{cl} = \frac{\mu U}{\sigma} u_{cl} = \mathrm{Ca}\, u_{cl}, \tag{5.7}$$

где U – размерная среднерасходная скорость во входном сечении, u_{cl} – безразмерная скорость ЛТК, Ca – капиллярное число, которое характеризует соотношении вязких и поверхностных сил. Объединяя формулы (5.6) и (5.7), получаем выражение для u_{cl}

$$u_{cl} = \frac{1}{\mathrm{Ca}}\left[\frac{1}{4{,}96}\tanh^{-1}\left(\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1}\right)\right]^{\frac{1}{0{,}702}}. \tag{5.8}$$

Таким образом, движение маркера, расположенного на твердой стенке, описывается следующими выражениями:

$$x_1 = 1,\ \frac{dx_2}{dt} = u_{cl}\ .$$

Выражение (5.8) описывает скорость контактной линии, которая складывается из скоростей накатывания и скольжения. Последняя используется в качестве граничного условия на линии контакта при удовлетворении граничных условий на свободной поверхности и определяется из следующей гипотезы. При значениях динамического краевого угла, близкого в 180°, скорость скольжения близка к нулю, т.е. выполняется условие прилипания. С ростом отклонения угла от 180° значение скорости скольжения увеличивается. В численных экспериментах использовалась следующая формула

$$u_{sl} = u_{cl}\left(0{,}8 - 0{,}004\ \theta_d\right),$$

значение угла задается в градусах. На твердой стенке в малой окрестности ЛТК выделяется участок, на котором скорость падает от u_{sl} до нуля. При этом длина участка и характер изменения скорости на нем выбираются так, чтобы отсутствовала сингулярность в определении динамических характеристик. На основании параметрических исследований длина скольжения l выбрана 0,025 безразмерных единиц, а зависимость, описывающая скорость скольжения, задана формулой (2.26).

5.3. Методические расчеты

Тестирование методики расчета проводилось на задаче растекания капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности. Предполагается, что течение осесимметричное и движение осуществляется под действием силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Область решения в начальный момент времени схематично изображена на рис. 5.6. Математическая постановка задачи включает уравнения Навье–Стокса и неразрывности, записанные в безразмерных переменных:

$$\mathrm{Ga}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\mathrm{grad}\ p + \Delta\mathbf{u} + \mathbf{e},$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0,$$

где $\mathrm{Ga} = \rho^2 g R^3 / \mu^2$ – число Галилея, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением силы тяжести. В качестве масштабов длины, скорости, давления выбирались величины R, $\rho g R^2 / \mu$, $\rho g R$.

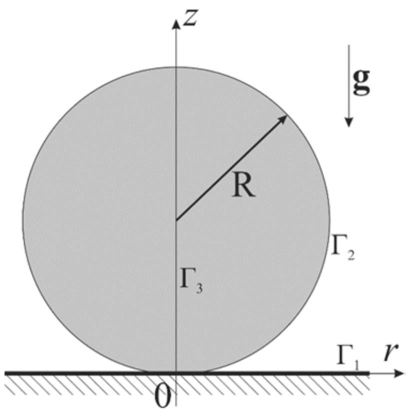


Рис. 5.6. Область решения

На свободной поверхности Γ_2 граничные условия заключаются в отсутствии касательного напряжения и равенстве нормального сумме внешнего и капиллярного давлений. Внешнее давление без ограничения общности можно считать нулевым. На стенке Γ_1 выполняется условие прилипания, на оси симметрии Γ_3 – условия симметрии. Движение свободной поверхности осуществляется в соответствии с кинематическим условием.

Для определения скорости движения ЛТК используется соотношение Янга, которое связывает эмпирической функциональной зависимостью значения динамического краевого угла, равновесного краевого угла и числа Бонда $\mathrm{Bo} = \rho g R^2 / \sigma$,

$$\frac{\cos\theta_s - \cos\theta_d}{\cos\theta_s + 1} = \operatorname{tang}\left(4{,}96\left(\mathrm{Bo}\, u_{cl}\right)^{0{,}702}\right).$$

На твердой стенке в окрестности ЛТК выделяется малый участок, на котором касательная скорость падает от значения скорости скольжения на линии контакта до нуля по показательному закону.

Для проверки достоверности результатов расчетов были определены равновесные формы капли, лежащей на твердой горизонтальной подложке в поле силы тяжести. Первые исследования формы поверхности жидкости, взаимодействующей с твёрдыми границами, проводились ещё в XIX в., когда был сформулирован закон капиллярного давления Лапласа, который является условием механического равновесия.

Проведена серия расчетов на последовательности сеток для проверки аппроксимационной сходимости алгоритма расчета. Равновесные формы

капли определяются как форма свободной поверхности в момент времени, когда максимальная скорость по области падает до значений, меньших
10^{-4}. На рис. 5.7 представлены результаты, полученные с помощью разработанного алгоритма (сплошные линии) и вычисленные из условия механического равновесия (пунктирная линия).

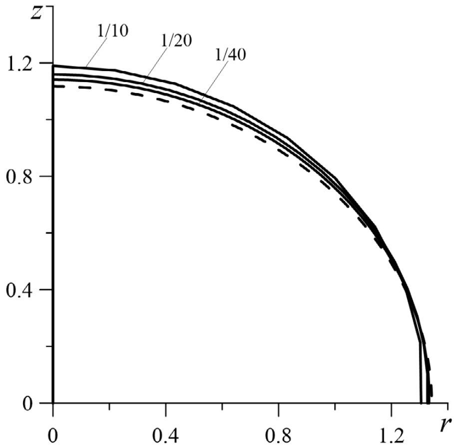


Рис. 5.7. Равновесные формы капли, Ga = 3,249, Bo = 0,594, $\theta_s = 90°$

Таблица 5.1

Значения радиуса пятна и высоты равновесной капли, Ga = 3,249, Bo = 0,594, $\theta_s = 90°$

Δ	R_s	H_s	E_V, %
1/10	1,305	1,190	4,4
1/20	1,323	1,159	3,8
1/40	1,333	1,141	2
1/80	1,337	1,130	1,04
Условие равновесия	1,343	1,117	

В табл. 5.1 приведены вычисленные значения радиуса пятна R_s и высоты капли H_s, а также значение величины потери массы капли E_V по отношению к первоначальной в момент достижения равновесной формы. Наблюдается аппроксимационная сходимость результатов.

С течением времени первоначально сферическая капля растекается по твердой стенке, приобретая равновесную форму, что демонстрирует рис. 5.8.

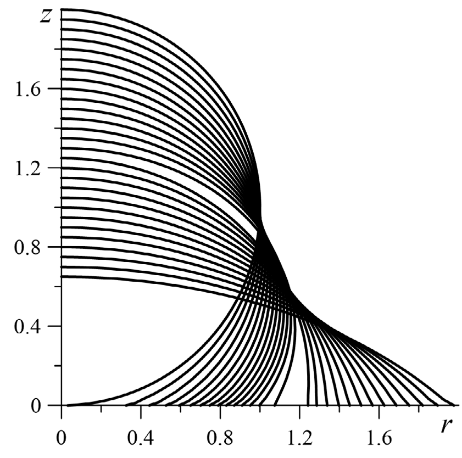


Рис. 5.8. Эволюция свободной поверхности,

Ga = 3,249, Bo = 0,594, θ_s = 14°

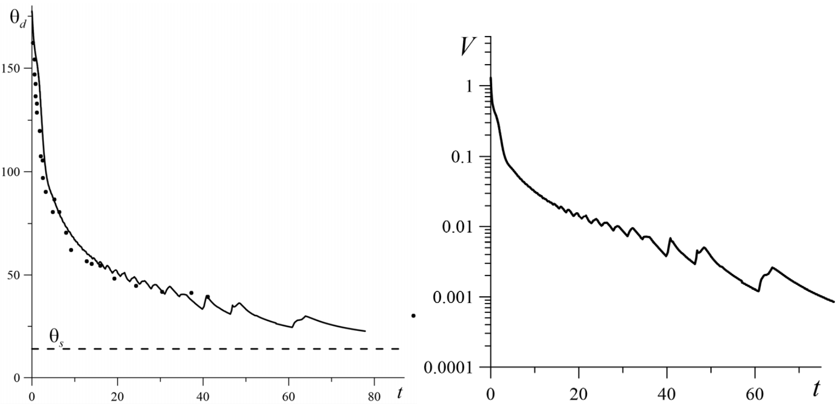


Рис. 5.9. Зависимость динамического краевого угла и скорости контактной линии от времени, Ga = 3,249, Bo = 0.594, θ_s = 14°

График зависимости динамического краевого угла и скорости перемещения ЛТК от времени показан на рис. 5.9. Видно, что со временем угол уменьшается, стремясь к равновесному. Точками на графике представлены результаты экспериментальных исследований, взятых из работы [252]. Наблюдается удовлетворительное согласование результатов.

Рисунок 5.10 демонстрирует влияние параметра Галилея на динамику характеристик процесса растекания. С его увеличением наблюдаются колебания формы капли в процессе установления равновесной формы, которые можно объяснить усилением инерционных эффектов. Однако равновесные формы капли остаются одинаковыми. Влияние параметра Бонда представлено на рис. 5.11. С уменьшением параметра Бонда форма капли стремится к сферической, а время ее установления уменьшается.

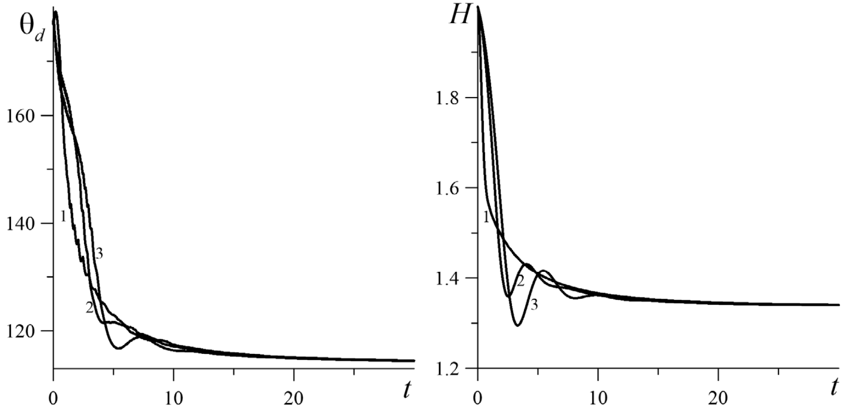


Рис. 5.10. Зависимость θ_d и H от времени, Bo = 0,594, θ_s = 114°:
1 – Ga = 0,249, *2* – Ga = 3,249, *3* – Ga = 6,249

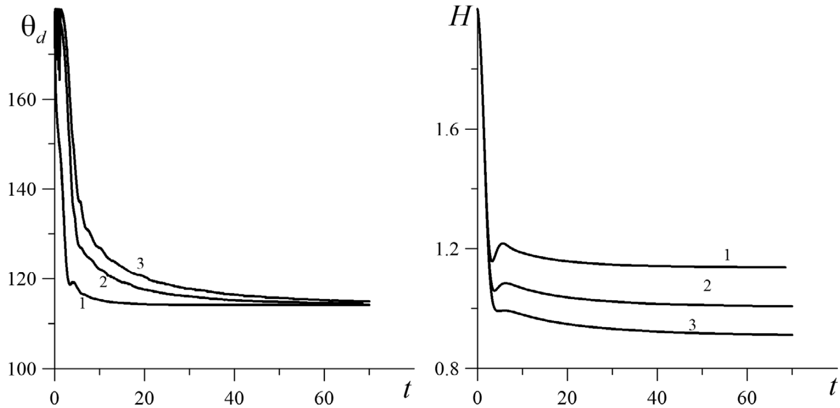


Рис. 5.11. Зависимость θ_d и H от времени, θ_s = 114°, Ga = 3,249:
1 – Bo = 0,3, *2* – Bo = 1,594, *3* – Bo = 2,594

5.4. Результаты расчетов заполнения круглой трубы вязкой жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения

В данном разделе представлены результаты численного моделирования процесса заполнения вертикальной круглой трубы вязкой жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения и сложного взаимодействия фаз на линии трехфазного контакта. В результате численных экспериментов установлено, что форма поверхности раздела фаз устанавливается с течением времени и перемещается вдоль трубы со среднерасходной скоростью, как и в случае неучёта сил поверхностного натяжения.

В качестве характеристик установившейся формы свободной поверхности выберем параметр χ и динамический краевой угол θ_d. В табл. 5.2 представлены результаты расчетов отмеченных характеристик на последовательности сеток с шагом Δ, демонстрирующие аппроксимационную сходимость алгоритма расчета.

Таблица 5.2

Характеристики χ и θ_d в зависимости от шага сетки Δ, Re = 0,1, W = 1, Ca = 0,01, θ_s = 120°

Δ	θ_d	χ
1/10	126,09	0,373
1/20	126,42	0,362
1/40	126,55	0,355
1/80	126,59	0,351
1/160	126,61	0,352

Установление формы свободной поверхности при заполнении круглой трубы показано на рис. 5.12 для различных значений капиллярного числа Ca и равновесного краевого угла θ_s. С течением времени форма свободной границы и динамический краевой угол устанавливаются, и контактная линия перемещается со среднерасходной скоростью. Время установления формы зависит от параметра Ca, чем меньше капиллярное число, тем быстрее устанавливается форма.

Установление значения динамического краевого угла θ_d и параметра χ с течением времени демонстрирует рис. 5.13, *а*, *б*. Для малых значений капиллярного числа Ca динамический угол незначительно превышает равновесный, а при Ca порядка единицы стремится к 180°.

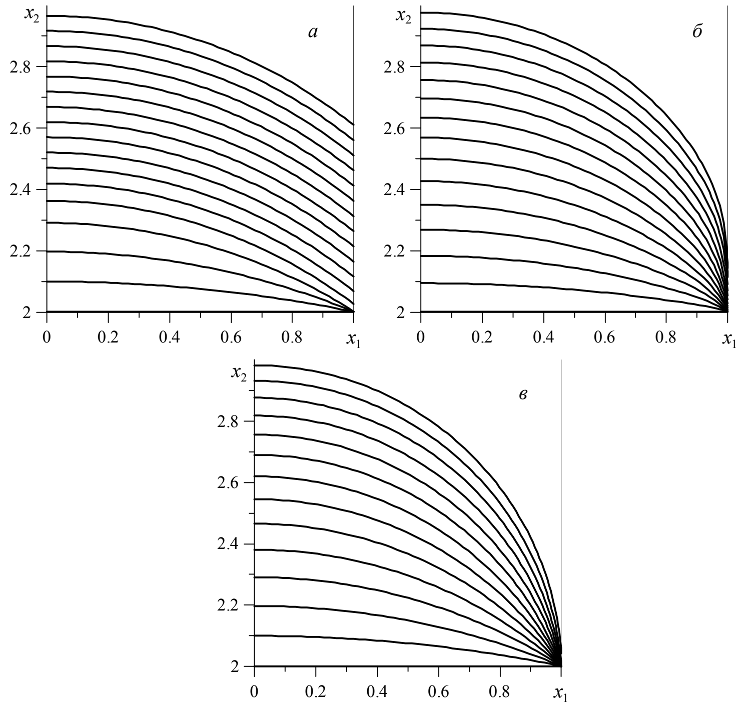


Рис. 5.12. Последовательность форм свободной поверхности с интервалом времени 0,05, Re = 0,1, W = 1: *а* – Ca = 0,01, θ_s = 120°; *б* – Ca = 1, θ_s = 120°; *в* – Ca = 0,01, θ_s = 175°

Контактная линия начинает движение, когда значение динамического угла θ_d превышает равновесный угол θ_s, при этом ее скорость u_{cl} увеличивается по мере увеличения разности $\theta_d - \theta_s$. График зависимости u_{cl} от времени приведен на рис. 5.13, *в* (черные кривые). С течением времени значение u_{cl} асимптотически стремится к величине порядка единицы. Используемая в работе математическая модель предполагает, что ЛТК перемещается за счет двух механизмов: накатывание и скольжение. Изменение скорости скольжения u_{sl} с течением времени представлено на рис. 5.13, *в* (серые кривые). При этом чем ближе значение θ_d к 180°, тем меньше установившееся значение u_{sl}, т.е. доминирует механизм накатывания свободной границы на твердую стенку.

Рассмотрим влияние основных параметров задачи на кинематические и динамические характеристики потока и на установившуюся форму свободной поверхности.

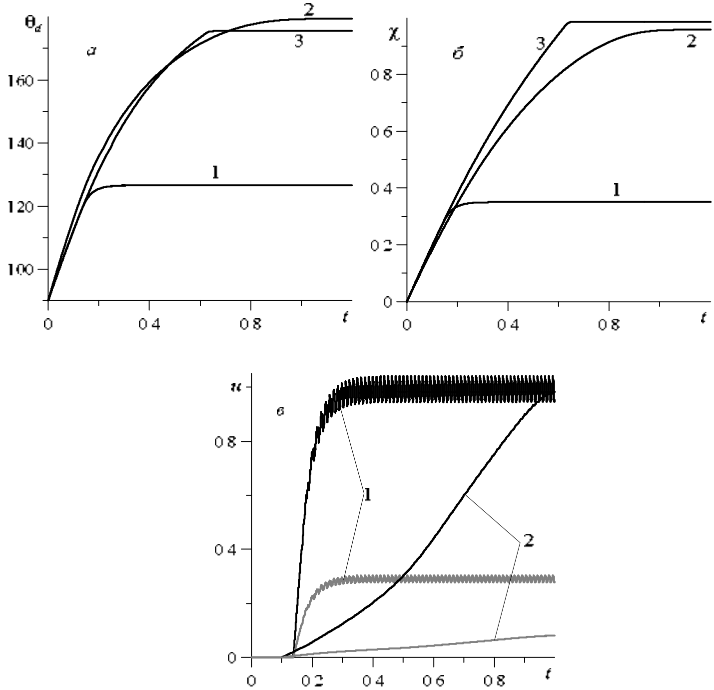


Рис. 5.13. Изменение со временем характеристик χ, θ_d, u_{sl}, u_{cl}, Re = 0,1, W = 1:
1 – Ca = 0,01, θ_s = 120°; *2* – Ca = 1, θ_s = 120°; *3* – Ca = 0,01, θ_s = 175°

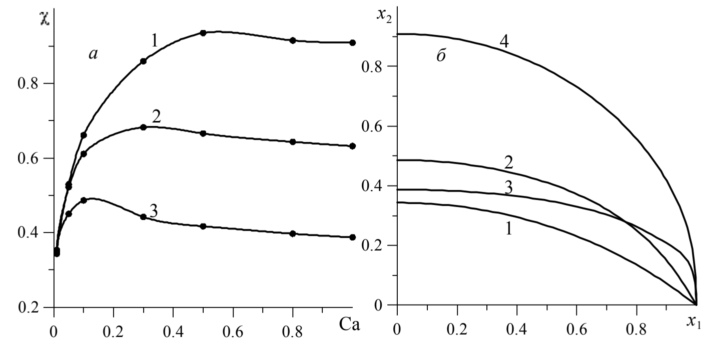


Рис. 5.14. Зависимость параметра χ от Ca (*а*), Re = 0,1, θ_s = 120°: *1, 2, 3* – W = 1, 10, 50;
установившиеся формы свободной границы (*б*), Re = 0,1, θ_s = 120°:
1 – Ca = 0,01, W = 50; *2* – Ca = 0,1, W = 50; *3* – Ca = 1, W = 50; *4* – Ca = 1, W = 1

Графики зависимости параметра χ от Ca приведены на рис. 5.14, *а* для различных значений W. При малых значениях Ca установившаяся форма поверхности практически совпадает со сферической, а динамический краевой угол – с равновесным углом (рис. 5.14, *б*, кривая *1*). Изменение W в диапазоне от 0 до 50 существенно не влияет на форму свободной границы. С увеличением капиллярного числа Ca роль сил поверхностного натяжения уменьшается, свободная граница приобретает более выпуклую форму. Наличие максимума на графиках можно объяснить усилением роли гравитационных эффектов над капиллярными. Соответствующие формы границы приведены на рис. 5.14, *б*, кривые *2*, *3*. Число Ca больше единицы практически не влияет на распределение характеристик, и динамический угол приближается к 180°.

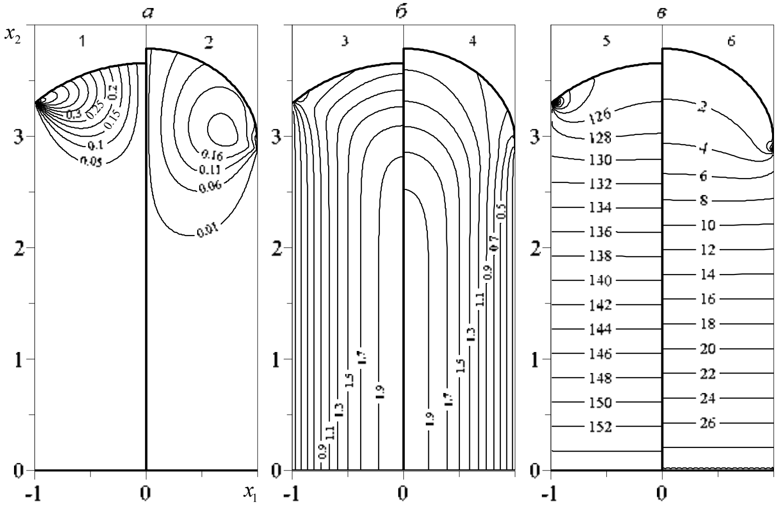


Рис. 5.15. Распределение аксиальной (*а*), радиальной (*б*) скоростей, давления (*в*) в момент времени t = 1,5, Re = 0,1, W = 1, θ_s = 120°: *1, 3, 5* – Ca = 0,01; *2, 4, 6* – Ca = 1

Распределения характеристик потока для различных значений капиллярного числа представлены на рис. 5.15. В области течения можно выделить зону одномерного и двумерного движения в окрестности свободной границы. В случае Ca = 0,01 максимальное значение радиальной скорости приблизительно составляет 0,64 и локализовано вблизи контактной линии. При Ca = 1 площадь свободной поверхности увеличивается, максимальное значение радиальной скорости смещается внутрь области и приблизительно равно 0,23. Распределения аксиальной скорости качественно совпадают при значениях капиллярного числа 0,01 и 1, имеются небольшие количественные отличия. Градиенты давления в области одномерного движения также совпадают, но при Ca = 0,01 абсолютные значения давления имеет высокие значения за счет большего капиллярного давления. В окрестности ЛТК реализуется зона пониженного давления.

Влияние равновесного краевого угла на характеристики формы установившейся свободной поверхности демонстрирует рис. 5.16. Видно, что динамический краевой угол линейным образом зависит от равновесного. При Ca ≥ 1 значение θ_s не влияет на форму границы раздела (кривые *1*).

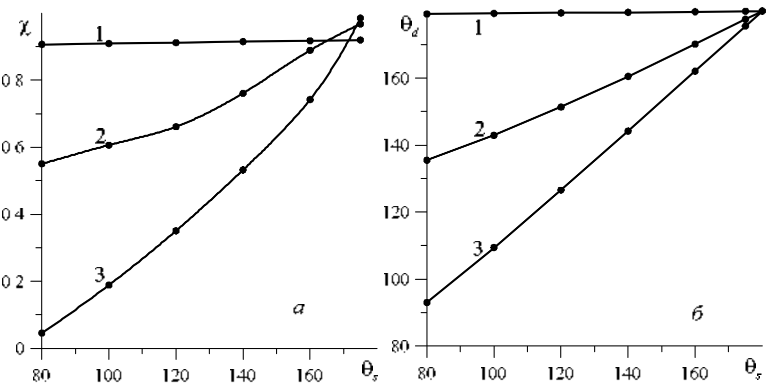


Рис. 5.16. Зависимость параметра χ и θ_d от θ_s, Re = 0,1, W = 1:
1 – Ca = 1, *2* – Ca = 0,1, *3* – Ca = 0,01

Распределения характеристик потока в области течения представлены на рис. 5.17 для двух значений равновесного угла в момент времени, когда форма поверхности установилась. Для более пологих форм максимум радиальной скорости имеет высокие значения и локализован на границе раздела, как и в случае, показанном на рис. 5.15. Более выпуклой поверхности при θ_s=175° соответствует высокая кривизна и большое капиллярное давление, что объясняет разницу в абсолютных значениях давления по области.

На рис. 5.18 представлены графики зависимости величины χ от параметра W. Наблюдается уменьшение параметра χ, при этом скорость убывания зависит от соотношения гравитационных и сил поверхностного натяжения. Чем меньше поверхностные силы, тем быстрее убывает χ и менее выпуклой становится форма поверхности. На динамический краевой угол параметр W не оказывает существенного влияния.

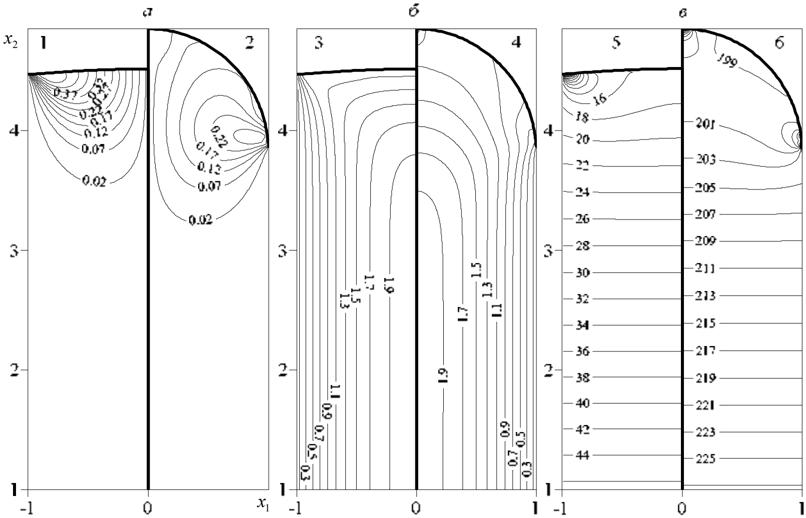


Рис. 5.17. Распределение аксиальной (*а*), радиальной (*б*) скоростей, давления (*в*) в момент времени t = 1,5, Re = 0,1, W = 1, Ca = 0,01: *1, 3, 5* – θ_s = 80°; *2, 4, 6* – θ_s = 175°

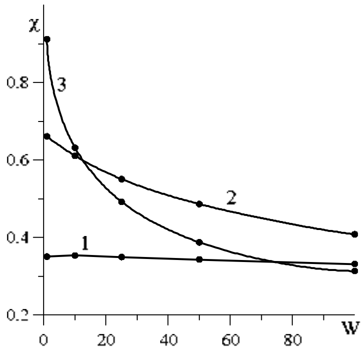


Рис. 5.18. Зависимость параметра χ от W, Re = 0,1, θ_s = 120:
1 – Ca = 0,01, *2* – Ca = 0,1, *3* – Ca = 1

Литература

1. Малкин А.Я. Современное состояние реологии полимеров: достижения и проблемы // Высокомолекулярные соединения. 2009. Т. 51, № 1. С. 106–136.
2. Ceramic tape casting: A review of current methods and trends with emphasis on rheological behaviour and flow analysis / M. Jabbari [et al.] // Mater. Sci. Eng. B. 2016. Vol. 212. P. 39–61.
3. Bird R.B., Dai G.C., Yarusso B.J. The Rheology and Flow of Viscoplastic Materials // Rev. Chem. Eng. De Gruyter, 1983. Vol. 1, No 1. P. 1–70.
4. Barnes H.A. The yield stress–a review or ‘παντα ρει’–everything flows? // J. Nonnewton. Fluid Mech. 1999. Vol. 81, No 1–2. P. 133–178.
5. Борзенко Е.И., Якутенок В.А. Эволюция свободной поверхности при заполнении плоских каналов вязкой жидкостью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2008. № 1. С. 24–30.
6. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Заполнение каналов неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 6. С. 40–46.
7. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 1. С. 45–55.
8. Борзенко Е.И., Рыльцев И.А., Шрагер Г.Р. Кинематика течения жидкости Балкли–Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 5. С. 53–64.
9. Якутенок В.А., Борзенко Е.И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе метода SIMPLE // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 3. С. 52–58.
10. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Моделирование процесса заполнения плоских каналов вязкопластичной жидкостью // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45, № 2. С. 187–193.
11. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Фонтанирующее неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении круглой трубы // Теоретические основы химической технологии. 2014. Т. 48, № 6. С. 677–684.

12. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Структура течения вязкопластичной жидкости при заполнении канала // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52, № 4. С. 412–422.

13. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Течения вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–5. С. 2037–2038.

14. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 2. С. 53–60.

15. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Влияние вида граничных условий на линии трехфазного контакта на характеристики течения при заполнении канала // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 2. С. 3–14.

16. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении плоского канала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. Т. 18, № 2. С. 80–87.

17. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Установившееся неизотермическое течение степенной жидкости в плоском / осесимметричном канале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 41–52.

18. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Влияние вязкой диссипации на температуру, вязкость и характеристики течения при заполнении канала // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 2. С. 221–231.

19. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 4. С. 901–909.

20. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Влияние вязкой диссипации на деформацию и ориентацию элементов жидкости при заполнении трубы // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 4. С. 910–919.

21. Borzenko E.I., Shrager G.R., Frolov O.Y. The impact of viscous dissipation on the flow parameters during round tube filling // Acta Mech. 2016. Vol. 227. P. 2609–2623.

22. Borzenko E.I., Ryltseva K.E., Shrager G.R. Free-surface flow of a viscoplastic fluid during the filling of a planar channel // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2018. Vol. 254. P. 12–22.

23. Borzenko E.I., Frolov O.Y., Shrager G.R. Kinematics of the fountain flow during pipe filling with a power-law fluid // AIChE J. 2019. Vol. 65, No 2. P. 850–858.
24. Mathematical simulation of nonisothermal filling of plane channel with non-Newtonian fluid / E.I. Borzenko [et al.] // J. Phys. Conf. Ser. 2016. Vol. 754, No 2. P. 022002.
25. Borzenko E.I., Frolov O.Y., Shrager G.R. Accounting viscous dissipation at round tubes filling // Key Engineering Materials. 2016. Vol. 685. P. 191–194.
26. Nonisothermal filling of a planar channel with a power-law fluid / E.I. Borzenko [et al.] // J. Phys. Conf. Ser. 2017. Vol. 899, No 2. P. 022001.
27. Basalaev A.S., Borzenko E.I., Shrager G.R. Filling of a circular pipe with a viscous fluid accounting for the surface tension forces // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1128. P. 012032.
28. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. М. : Химия, 1984. 632 с.
29. Kamal M.R., Isayev A.I., Liu S.-J. Injection molding : technology and fundamentals. Hanser, 2009. 926 p.
30. Lafleur P.G., Kamal M.R. A structure-oriented computer simulation of the injection molding of viscoelastic crystalline polymers part I: Model with fountain flow, packing, solidification // Polym. Eng. Sci. 1986. Vol. 26, No 1. P. 92–102.
31. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Mathematical modeling of injection mold filling: A review // Adv. Polym. Technol. 1986. Vol. 6, No 4. P. 457–466.
32. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 6. С. 961–971.
33. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Interface Sci. 1971. Vol. 35, No 1. P. 85–101.
34. Caboussat A. Numerical simulation of two-phase free surface flows // Arch. Comput. Methods Eng. 2005. Vol. 12, No 2. P. 165–224.
35. Floryan J.M., Rasmussen H. Numerical Methods for Viscous Flows With Moving Boundaries // Appl. Mech. Rev. 1989. Vol. 42, No 12. P. 323–341.
36. Hyman J.M. Numerical methods for tracking interfaces // Phys. D Nonlinear Phenom. 1984. Vol. 12, No 1–3. P. 396–407.
37. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8, No 12. P. 2182–2189.

38. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 39, No 1. P. 201–225.

39. A study on the extension of a VOF/PLIC based method to a curvilinear coordinate system / W. Jang [et al.] // Int. J. Comut. Fluid Dyn. 2008. Vol. 22, No 4. P. 241–257.

40. Osher S., Sethian J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations // J. Comput. Phys. 1988. Vol. 79, No 1. P. 12–49.

41. Hirt C.W., Cook J.L., Butler T.D. A lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface // J. Comput. Phys. 1970. Vol. 5, No 1. P. 103–124.

42. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Finite element simulation of fountain flow in injection molding // Polym. Eng. Sci. Society of Plastics Engineers, 1986. Vol. 26, No 7. P. 449–454.

43. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // AIChE J. 2010. Vol. 56, No 5. P. 1147–1162.

44. Fritts M.J., Boris J.P. The Lagrangian solution of transient problems in hydrodynamics using a triangular mesh // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 31, No 2. P. 173–215.

45. Crowley W.P. Flag: A free-Lagrange method for numerically simulating hydrodynamic flows in two dimensions // Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Berlin; Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1970. P. 37–43.

46. Афанасьев К.Е., Рейн Т.С., Карабцев С.Н. Метод естественных соседей для решения задач вязкой и идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Кемеровского государственного университета. 2009. № 2. С. 25–33.

47. Daly B.J., Harlow F.H., Welch J.E. Numerical fluid dynamics using the particle-and-force method, report. New Mexico, 1964. 165 p.

48. Morris J.P. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2000. Vol. 33, No 3. P. 333–353.

49. Афанасьев К.Е., Попов А.Ю. Моделирование процесса разрушения плотины методом SPH // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 3. С. 3–22.

50. Monaghan J.J. Simulating Free Surface Flows with SPH // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 110, No 2. P. 399–406.

51. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. : Наука, 1970. 288 с.
52. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М. : Мир, 1984. 494 с.
53. Штоколова М.Н., Якутенок В.А. Численное моделирование колебаний невязкой капли под действием поверхностного натяжения // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20, № 7. С. 609–613.
54. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. 1992. Т. 4, № 10. С. 62–70.
55. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds // J. Comput. Phys. 1997. Vol. 135, No 2. P. 203–216.
56. Mackerle J. Finite element analysis and simulation of polymers~an addendum: a bibliography (1996-2002) // Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 2003. Vol. 11, No 2. P. 195–231.
57. Mackerle J. Finite-element analysis and simulation of polymers: a bibliography (1976-1996) // Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 1997. Vol. 5, No 6. P. 615–650.
58. Unverdi S.O., Tryggvason G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 100, No 1. P. 25–37.
59. Harlow F.H. Particle-in-cell computing method for fluid dynamics // Methods Comput. Phys. 1964. No 3. P. 319–343.
60. A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow / Tryggvason G. [et al.] // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 169, No 2. P. 708–759.
61. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. N. Y.: Hemisphere Pub. Corp., 1980. 197 p.
62. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : Наука, 1987. 600 с.
63. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. Т. 217, № 2. С. 295–298.
64. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 352 с.
65. Askar S.S., Karawia A.A. On Solving Pentadiagonal Linear Systems via Transformations // Math. Probl. Eng. 2015. Vol. 2015. P. 1–9.
66. Сумм Б.Д., Горюнов Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. М. : Химия, 1976. 232 с.

67. De Gennes P.G. Wetting: Statics and dynamics // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57, No 3. P. 827–863.

68. Wetting and spreading / D. Bonn [et al.] // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81, No 2. P. 739–805.

69. Dussan V.E.B. On the Spreading of Liquids on Solid Surfaces: Static and Dynamic Contact Lines // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11, No 1. P. 371–400.

70. Dussan V.E.B., Ramé E., Garoff S. On identifying the appropriate boundary conditions at a moving contact line: an experimental investigation // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 230, No 1. P. 97.

71. Blake T.D. The physics of moving wetting lines // J. Colloid Interface Sci. 2006. Vol. 299, No 1. P. 1–13.

72. Shikhmurzaev Y.D. Singularities at the moving contact line. Mathematical, physical and computational aspects // Phys. D Nonlinear Phenom. 2006. Vol. 217, No 2. P. 121–133.

73. Shikhmurzaev Y.D. Some dry facts about dynamic wetting // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2011. Vol. 197, No 1. P. 47–60.

74. Blake T.D. Discussion notes: A more collaborative approach to the moving contact-line problem? // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2011. Vol. 197, No 1. P. 343–345.

75. Байокки К., Пухначев В.В. Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье-Стокса и проблема динамического краевого угла // Прикладная механика и техническая физика. 1990. № 2. С. 27–40.

76. Shikhmurzaev Y.D. Moving contact lines in liquid/liquid/solid systems // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 334. P. 211–249.

77. Durbin P.A. Considerations on the moving contact-line singularity, with application to frictional drag on a slender drop // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 197, No 1. P. 157.

78. Burley R., Kennedy B.S. An experimental study of air entrainment at a solid/liquid/gas interface // Chem. Eng. Sci. 1976. Vol. 31, No 10. P. 901–911.

79. Blake T.D., Ruschak K.J. A maximum speed of wetting // Nature. 1979. Vol. 282, No 5738. P. 489–491.

80. Gutoff E.B., Kendrick C.E. Dynamic contact angles // AIChE J. 1982. Vol. 28, No 3. P. 459–466.

81. Hocking L.M. A moving fluid interface on a rough surface // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 76, No 4. P. 801–817.

82. Huh C., Mason S.G. The steady movement of a liquid meniscus in a capillary tube // J. Fluid Mech. 1977. Vol. 81, No 3. P. 401–419.
83. Voinov O.V. Hydrodynamics of wetting // Fluid Dyn. 1977. Vol. 11, No 5. P. 714–721.
84. Cox R.G. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 168. P. 169–194.
85. Baiocci C., Pukhnachev V.V. Problems with one-sided constraints for Navier-Stokes equations and the dynamic contact angle // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1990. Vol. 31, No 2. P. 185–197.
86. Ngan C.G., Dussan V.E.B. The moving contact line with a 180° advancing contact angle // Phys. Fluids. 1984. Vol. 27, No 12. P. 2785–2787.
87. Nonlocal hydrodynamic influence on the dynamic contact angle: Slip models versus experiment / Wilson M.C.T. [et al.] // Phys. Rev. E. 2006. Vol. 73, No 4. P. 041606.
88. Wang X. Dynamic wetting and stress singularity on contact line // Sci. China Ser. E. 2003. Vol. 46, No 4. P. 407–417.
89. Blake T.D., Shikhmurzaev Y.D. Dynamic Wetting by Liquids of Different Viscosity // J. Colloid Interface Sci. 2002. Vol. 253, No 1. P. 196–202.
90. Hoffman R.L. A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid-gas systems // J. Colloid Interface Sci. 1975. Vol. 50, No 2. P. 228–241.
91. Elliott G.E.P., Riddiford A.C. Dynamic contact angles // J. Colloid Interface Sci. 1967. Vol. 23, No 3. P. 389–398.
92. Ngan C.G., Dussan V. E.B. On the nature of the dynamic contact angle: an experimental study // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 118, No 1. P. 27.
93. Kirkinis E., Davis S.H. Hydrodynamic Theory of Liquid Slippage on a Solid Substrate Near a Moving Contact Line // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, No 23. P. 234503.
94. Schwedoff T. Recherches expérimentales sur la cohésion des liquides //
J. Phys. Theor. Appl. 1889. Vol. 8, No 1. P. 341–359.
95. Shikhmurzaev Y.D. Capillary Flows with Forming Interfaces. London: Chapman and Hall/CRC, 2007. 480 p.
96. Rose W. Fluid-Fluid Interfaces in Steady Motion // Nature. 1961. Vol. 191. P. 242–243.
97. Coyle D.J., Blake J.W., Macosko C.W. The kinematics of fountain flow in mold-filling // AIChE J. 1987. Vol. 33, No 7. P. 1168–1177.
98. Lee S.-L., Liao W.-C. Numerical simulation of a fountain flow on nonstaggered Cartesian grid system // Int. J. Heat Mass Transf. 2008. Vol. 51, No 9-10. P. 2433–2443.

99. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Transient free-surface flows in injection mold filling // AIChE J. 1988. Vol. 34, No 3. P. 403–410.

100. Transient free□surface flows: Motion of a fluid advancing in a tube / Behrens R.A. [et al.] // AIChE J. 1987. Vol. 33, No 7. P. 1178–1186.

101. Gogos C.G., Huang C.F., Schmidt L.R. The process of cavity filling including the fountain flow in injection molding // Polym. Eng. Sci. Society of Plastics Engineers. 1986. Vol. 26, No 20. P. 1457–1466.

102. Simulation of polymer molding filling process with an adaptive weld line capturing algorithm / Yang B. [et al.] // Int. J. Mater. Form. 2012. Vol. 5, No 1. P. 25–37.

103. Mavridis H. Finite element studies in injection mold filling. Canada, Hamilton, Ontario, McMaster Univ., 1988. 182 p.

104. Huilgol R.R., You Z. On the importance of the pressure dependence of viscosity in steady non-isothermal shearing flows of compressible and incompressible fluids and in the isothermal fountain flow // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2006. Vol. 136, No 2-3. P. 106–117.

105. Моделирование процесса истечения вязкой жидкости под действием перепада давления с заполнением канала / А.В. Новошинцев [и др.] // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 3. С. 341–349.

106. Jin X. Boundary element study on particle orientation caused by the fountain flow in injection molding // Polym. Eng. Sci. 1993. Vol. 33, No 19. P. 1238–1242.

107. Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. The indirect boundary element method for the axisymmetric free surface Stokes flow // WIT Trans. Modelling Simul. 2015. Vol. 61. P. 273–284.

108. Sato T., Richardson S.M. Numerical simulation of the fountain flow problem for viscoelastic fluids // Polym. Eng. Sci. 1995. Vol. 35, No 10. P. 805–812.

109. Kamal M.R., Goyal S.K., Chu E. Simulation of injection mold filling of viscoelastic polymer with fountain flow // AIChE J. 1988. Vol. 34, No 1. P. 94–106.

110. Schmidt L.R. A special mold and tracer technique for studying shear and extensional flows in a mold cavity during injection molding // Polym. Eng. Sci. 1974. Vol. 14, No 11. P. 797–800.

111. Yokoi H., Kanetoh Y. Visualization Analysis of Asymmetric Fountain Flow Phenomenon in Injection Molding of Filler-reinforced Resins by Rotary Runner Exchange System // Int. Polym. Process. 2005. Vol. 20, No 2. P. 157–161.

112. Measurement of fiber orientation distribution in injection-molded short-glass-fiber composites using X-ray computed tomography / Nguyen Thi T.B. [et al.] // J. Mater. Process. Technol. 2015. Vol. 219. P. 1–9.

113. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Deformation and Orientation of Fluid Elements Behind an Advancing Flow Front // J. Rheol. 1986. Vol. 30, No 3. P. 555–563.

114. Tadmor Z. Molecular orientation in injection molding // J. Appl. Polym. Sci. 1974. Vol. 18, No 6. P. 1753–1772.

115. Kobayashi Y., Otsuki Y., Kanai T. Effect of fountain flows on injection-molding-induced morphology // Soc. Plast. Eng. P. 1–2.

116. Nguyen-Chung T., Mennig G. Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling // Rheol. Acta. 2001. Vol. 40, No 1. P. 67–73.

117. Friedrichs B., Güçeri S.I. A novel hybrid numerical technique to model 3-D fountain flow in injection molding processes // J. Nonnewton. Fluid Mech. 1993. Vol. 49, No 2-3. P. 141–173.

118. Simulations of fibre orientation in dilute suspensions with front moving in the filling process of a rectangular channel using level-set method / Dou H.-S. [et al.] // Rheol. Acta. 2007. Vol. 46, No 4. P. 427–447.

119. Моделирование формования изделий из свободно-литьевых композиций / И.А. Глушков [и др.]. М. : Архитектура-С, 2007. 361 с.

120. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М. : Химия, 1977. 440 с.

121. Banks H.T., Hu S., Kenz Z.R. A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids // Adv. Appl. Math. Mech. 2011. Vol. 3, No 1. P. 1–51.

122. Chen D.-L., Yang P.-F., Lai Y.-S. A review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation // Microelectron. Reliab. 2012. Vol. 52, No 3. P. 541–558.

123. Paulo G.S., Tomé M.F., McKee S. A marker-and-cell approach to viscoelastic free surface flows using the PTT model // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2007. Vol. 147, No 3. P. 149–174.

124. Die-swell, splashing drop and a numerical technique for solving the Oldroyd B model for axisymmetric free surface flows / M.F. Tomé [et al.] // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2007. Vol. 141, No 2-3. P. 148–166.

125. Bonito A., Picasso M., Laso M. Numerical simulation of 3D viscoelastic flows with free surfaces // J. Comput. Phys. 2006. Vol. 215, No 2. P. 691–716.

126. Stability analysis of injection molding flows / A.C.B. Bogaerds [et al.] // J. Rheol. 2004. Vol. 48, No 4. P. 765–785.
127. Mitsoulis E. Effect of Viscoelasticity in Fountain Flow of Polyethylene Melts // Int. Polym. Process. 2009. Vol. 24, No 5. P. 439–451.
128. Baltussen M.G.H.M., Hulsen M.A., Peters G.W.M. Numerical simulation of the fountain flow instability in injection molding // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2010. Vol. 165, No 11-12. P. 631–640.
129. Numerical analysis of flow mark surface defects in injection molding flow / A.M. Grillet [et al.] // J. Rheol. 2002. Vol. 46, No 3. P. 651–669.
130. Khayat R.E. Three-dimensional boundary element analysis of drop deformation in confined flow for Newtonian and viscoelastic systems // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2000. Vol. 34, No 3. P. 241–275.
131. Bush M.B., Tanner R.I., Phan-Thien N. A boundary element investigation of extrudate swell // J. Nonnewton. Fluid Mech. 1985. Vol. 18, No 2. P. 143–162.
132. Кошелев К.Б., Пышнограй Г.В., Толстых М.Ю. Моделирование трехмерного течения полимерного расплава в сходящемся канале с прямоугольным сечением // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 3. С. 3–11.
133. Моделирование 3D профиля скорости нелинейной вязкоупругой жидкости в канале с квадратным сечением / Ю.А. Алтухов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18, № 3. С. 325–332.
134. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М. : Энергия, 1975. 352 с.
135. Coussot P. Yield stress fluid flows: A review of experimental data // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2014. Vol. 211. P. 31–49.
136. Березин И.К. Методы расчета течений неньютоновской жидкости со свободными поверхностями в технологии формования полимеров и дисперсных систем : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Пермь, 1995. 348 с.
137. Моделирование течений неньютоновских жидкостей, имеющих предел текучести / К.А. Чехонин [и др.] // Механика композитных материалов. 1988. № 6. С. 1112–1116.
138. Чехонин К.А., Булгаков В.К. Гидродинамика течений полимеризующейся нелинейно-вязкопластичной жидкости, имеющей свободную поверхность // ИФЖ. 1990. Т. 59, № 4. С. 764–771.
139. Чехонин К.А., Сухинин П.А. Движение нелинейно вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 3. С. 89–102.

140. Чехонин К.А., Булгаков В.К., Глушков И.А. Моделирование процесса формирования границы раздела двух неньютоновских жидкостей // Механика композитных материалов. 1990. № 4. С. 579–584.
141. Mitsoulis E. Flows of viscoplastic materials: models and computations // Rheol. Rev. London: Br. Soc. Rheol. 2007. P. 135–178.
142. Mitsoulis E. Numerical simulation of calendering viscoplastic fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2008. Vol. 154, No 2-3. P. 77–88.
143. Mitsoulis E., Matsoukas A. Free surface effects in squeeze flow of Bingham plastics // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2005. Vol. 129, No 3. P. 182–187.
144. Mitsoulis E. Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2010. Vol. 165, No 1-2. P. 45–55.
145. Injection of a viscoplastic material inside a tube or between two parallel disks: Conditions for wall detachment of the advancing front / Papaioannou J. [et al.] // J. Rheol. 2009. Vol. 53, No 5. P. 1155–1191.
146. Липанов А.М., Альес М.Ю., Константинов Ю.Н. Численное моделирование ползущих течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 7. С. 3–9.
147. Альес М.Ю., Константинов Ю.Н. Численное моделирование процессов течений высоковязких неньютоновских жидкостей с теплообменом // Гидрогазодинамические течения с тепломассообменом. 1990. № 4. С. 136–140.
148. Numerical simulation of moving free surface problems in polymer processing using volume-of-fluid method / Kim J.M. [et al.] // Polym. Eng. Sci. 2001. Vol. 41, No 5. P. 858–866.
149. Rudert A., Schwarze R. Experimental and numerical investigation of a viscoplastic Carbopol gel injected into a prototype 3D mold cavity // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2009. Vol. 161, No 1-3. P. 60–68.
150. A Numerthod for the Simulation of Free Surface Flows of Viscoplastic Fluid in 3D / Nikitin K.D. [et al.] // J. Comput. Math. 2011. Vol. 29, No 6. P. 605–622.
151. Fortin M., Glowinski R. Augmented Lagrangian Methods. North Holland: Elsevier, 1983. 339 p.
152. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М. : Наука, 1980. 384 с.
153. Basov I.V., Shelukhin V.V. Nonhomogeneous incompressible Bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2007. Vol. 142, No 1–3. P. 95–103.

154. Shelukhin V.V. Bingham Viscoplastic as a Limit of Non-Newtonian Fluids // J. Math. Fluid Mech. 2002. Vol. 4, No 2. P. 109–127.
155. Malek J., Ruzicka M., Shelukhin V.V. Herschel–Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows // Math. Model. Methods Appl. Sci. 2005. Vol. 15, No 12. P. 1845–1861.
156. Saramito P., Wachs A. Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows // Rheol. Acta. 2017. Vol. 56, No 3. P. 211–230.
157. Glowinski R., Wachs A. On the numerical simulation of viscoplastic fluid flow // Handbook of Numerical Analysis. Vol 16. Amsterdam : Elsevier, 2011. P. 483–717.
158. Muravleva E.A., Muravleva L. V. Unsteady flows of a viscoplastic medium in channels // Mech. Solids. 2009. Vol. 44, No 5. P. 792–812.
159. Muravleva E.A. The problem of stopping the flow of a viscoplastic medium in a channel // Moscow Univ. Mech. Bull. 2009. Vol. 64, No 1. P. 25–28.
160. Muravleva L. V. Squeeze plane flow of viscoplastic Bingham material // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2015. Vol. 220. P. 148–161.
161. Frigaard I.A., Nouar C. On the usage of viscosity regularisation methods for visco-plastic fluid flow computation // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2005. Vol. 127, No 1. P. 1–26.
162. Подрябинкин У.В., Рудяк В.Я. Моделирование течений неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале с эксцентриситетом // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2012. № 2. С. 112–122.
163. Численный алгоритм для моделирования установившихся ламинарных течений неньютоновских жидкостей в кольцевом зазоре с эксцентриситетом / А.А. Гаврилов [и др.] // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 44–56.
164. Bercovier M., Engelman M.A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // J. Comput. Phys. 1980. Vol. 36, No 3. P. 313–326.
165. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic / A.N. Beris [et al.] // J. Fluid Mech. 1985. Vol. 158. P. 219–244.
166. Papanastasiou T.C. Flows of Materials with Yield // J. Rheol. 1987. Vol. 31, No 5. P. 385–404.
167. Любимова Т.П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области // Изв. АН СССР, МЖГ. 1977. № 1. С. 3–8.
168. Tanner J.E., Milthorpe R.I. Numerical simulation of the flow of fluids with yield stress // Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Proceedings of the International Conference. 1983. С. 680–690.

169. Burgos G.R., Alexandrou A.N., Entov V. On the determination of yield surfaces in Herschel–Bulkley fluids // J. Rheol. 1999. Vol. 43, No 3. P. 463–483.
170. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы: введение в теорию. Москва. : Наука, 1977. 440 с.
171. Volarovich M.P., Gutkin A.M. Flow of a plastic-viscous body between two parallel plane walls and in the rang space between two coaxial tubes // Zhurnal Tekhnicheskoi Fiz. 1946. Vol. 16, No 3. P. 321–328.
172. Grinchik I.P., Kim A.K. Axial flow of a nonlinear viscoplastic fluid through cylindrical pipes // J. Eng. Phys. 1972. Vol. 23, No 2. P. 1039–1041.
173. Vatankhah A.R. Analytical solutions for Bingham plastic fluids in laminar regime // J. Pet. Sci. Eng. 2011. Vol. 78, No 3–4. P. 596–600.
174. Liu Y.-Q., Zhu K.-Q. Axial Couette–Poiseuille flow of Bingham fluids through concentric annuli // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2010. Vol. 165, No 21–22. P. 1494–1504.
175. Bahadori A., Zahedi G., Zendehboudi S. A novel analytical method predicts plug boundaries of bingham plastic fluids for laminar flow through annulus // Can. J. Chem. Eng. 2013. Vol. 91, No 9. P. 1590–1596.
176. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1974. 832 с.
177. Power law fluids and Bingham plastics flow models for ceramic tape casting / S.C. Joshi [et al.] // J. Mater. Process. Technol. 2002. Vol. 120, No 1–3. P. 215–225.
178. Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe / J. Peixinho [et al.] // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2005. Vol. 128, No 2–3. P. 172–184.
179. The PAL (Penalized Augmented Lagrangian) method for computing viscoplastic flows: A new fast converging scheme / Y. Dimakopoulos [et al.] // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2018. Vol. 256. P. 23–41.
180. Philippou M., Kountouriotis Z., Georgiou G.C. Viscoplastic flow development in tubes and channels with wall slip // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2016. Vol. 234. P. 69–81.
181. Round G.F., Yu S. Entrance laminar flows of viscoplastic fluids in concentric annuli // Can. J. Chem. Eng. 1993. Vol. 71, No 4. P. 642–645.
182. Шрагер Г.Р., Козлобродов А.Н., Якутенок В.А. Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1999. 229 с.
183. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. М. : Мир, 1964. 216 с.

184. Computer-aided injection molding system / K.K. Wang [et al.] // Final Report Cornell Univ. Ithaca ; New-York, 1978.

185. Borzenko E.I., Frolov O.Y., Shrager G.R. Fountain viscous fluid flow during filling a channel when taking dissipative warming into account // Fluid Dyn. 2014. Vol. 49. P. 37–45.

186. Alexandrou A.N., Duc E., Entov V. Inertial, viscous and yield stress effects in Bingham fluid filling of a 2-D cavity // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2001. Vol. 96, No 3. P. 383–403.

187. Бостанджиян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И. О гидродинамическом тепловом взрыве // ДАН СССР. 1965. Т. 163, № 1. С. 133–136.

188. Бостанджиян С.А., Черняева С.М. О гидродинамическом тепловом "взрыве" неньютоновской жидкости // Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, № 2. С. 301–304.

189. Беломытцев В.П., Гвоздков Н.Н. О потере тепловой устойчивости движения вязко-пластичного материала // Доклады АН СССР. 1966. Т. 170, № 2. С. 305–307.

190. Мамедов Р.М., Саттаров Р.М. О неизотермическом структурном режиме движения нелинейно-вязкопластичной среды в плоском канале // Известия АН СССР, МЖГ. 1977. № 2. С. 162–166.

191. Бендерская С.Л., Хусид Б.М., Шульман З.П. Неизотермическое течение неньютоновских жидкостей в каналах // Изв. АН СССР, МЖГ. 1980. № 3. С. 3–10.

192. Регирер С.А. Некоторые термогидродинамические задачи об установившемся одномерном течении вязкой капельной жидкости // ПММ. 1957. Т. 22, № 3. С. 424–430.

193. Peixinho J., Desaubry C., Lebouché M. Heat transfer of a non-Newtonian fluid (Carbopol aqueous solution) in transitional pipe flow // Int. J. Heat Mass Transf. 2008. Vol. 51, No 1–2. P. 198–209.

194. Viscous dissipation effect on the flow of a thermodependent Herschel-Bulkley fluid / N. Labsi [et al.] // Therm. Sci. 2015. Vol. 19, No 5. P. 1553–1564.

195. Labsi N., Benkahla Y.K., Boutra A. Temperature-dependent shear-thinning Herschel–Bulkley fluid flow by taking into account viscous dissipation // J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng. 2017. Vol. 39, No 1. P. 267–277.

196. Heat transfer correlation of viscoplastic fluid flow between two parallel plates and in a circular pipe with viscous dissipation / W. Berabou [et al.] // J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng. 2018. Vol. 40, No 8. P. 404.

197. Coelho P.M., Poole R.J. Heat Transfer of Bingham Fluids in an Annular Duct with Viscous Dissipation // Heat Transf. Eng. 2018. Vol. 39, No 20. P. 1753–1769.
198. Thermal development of the laminar flow of a Bingham fluid between two plane plates with viscous dissipation / A. Boualit [et al.] // Int. J. Therm. Sci. 2011. Vol. 50, No 1. P. 36–43.
199. Soares E.J., Naccache M.F., Souza Mendes P.R. Heat transfer to viscoplastic materials flowing axially through concentric annuli // Int. J. Heat Fluid Flow. 2003. Vol. 24, No 5. P. 762–773.
200. Effect of viscous dissipation on the temperature of the polymer during injection molding filling / Hassan H. [et al.] // Polym. Eng. Sci. 2008. Vol. 48, No 6. P. 1199–1206.
201. Kumar A., Ghoshdastidar P., Muju M. Computer simulation of transport processes during injection mold-filling and optimization of the molding conditions // J. Mater. Process. Technol. 2002. Vol. 120, No 1–3. P. 438–449.
202. Tutar M., Karakus A.A numerical study of solidification and viscous dissipation effects on polymer melt flow in plane channels // J. Polym. Eng. 2013. Vol. 33, No 2. P. 95–110.
203. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах / В.И.Янков [и др.]. Москва ; Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", Институт компьютерных исследований, 2008. 264 с.
204. Numerical simulation of the filling phase in the polymer injection moulding process with a conservative level set method / R. El Otmani [et al.] // Int. J. Mater. Form. 2008. Vol. 1, No 1. P. 731–734.
205. Vradis G.C., Dougher J., Kumar S. Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic // Int. J. Heat Mass Transf. 1993. Vol. 36, No 3. P. 543–552.
206. Li C.S., Hung C.F., Shen Y.K. Computer simulation and analysis of fountain flow in filling process of injection molding // J. Polym. Res. 1994. Vol. 1, No 2. P. 163–173.
207. New approach to develop a 3D non-isothermal computational framework for injection molding process based on level set method / X. Zhuang [et al.] // Chinese J. Chem. Eng. 2016. Vol. 24, No 7. P. 832–842.
208. Wang W., Li X., Han X. Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding // Polym. Eng. Sci. 2012. Vol. 52, No 1. P. 42–51.
209. Shen Y.K. Study on moving boundary problems of injection molding // Int. Commun. Heat Mass Transf. 1998. Vol. 25, No 5. P. 701–710.

210. Debbaut B. Non-isothermal and viscoelastic effects in the squeeze flow between infinite plates // J. Nonnewton. Fluid Mech. 2001. Vol. 98, No 1. P. 15–31.

211. Greene J.P., Wilkes J.O. Numerical analysis of injection molding of glass fiber reinforced thermoplastics. Part 2: Fiber orientation // Polym. Eng. Sci. 1997. Vol. 37, No 6. P. 1019–1035.

212. Greene J.P., Wilkes J.O. Numerical analysis of injection molding of glass fiber reinforced thermoplastics. Part 1: Injection pressures and flow // Polym. Eng. Sci. 1997. Vol. 37, No 3. P. 590–602.

213. Nguyen-Chung T. Flow analysis of the weld line formation during injection mold filling of thermoplastics // Rheol. Acta. 2004. Vol. 43, No 3. P. 240–245.

214. Nguyen-Chung T., Mennig G. Does fountain flow influence molecular orientation in injection moulded parts? // Plast. Rubber Compos. 2006. Vol. 35, No 10. P. 418–424.

215. Solidification behavior of high-density polyethylene during injection molding process: Enthalpy transformation method / B. Yang [et al.] // J. Appl. Polym. Sci. 2012. Vol. 128, No 3. P. 1922–1929.

216. Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in the injection molding process: Role of the mold-polymer interface / R. El Otmani [et al.] // J. Appl. Polym. Sci. 2011. Vol. 121, No 3. P. 1579–1592.

217. 3D finite element method for the simulation of the filling stage in injection molding / J.F. Hétu [et al.] // Polym. Eng. Sci. 1998. Vol. 38, No 2. P. 223–236.

218. Simulation of Non-isothermal Injection Molding for a Non-Newtonian Fluid by Level Set Method / B. Yang [et al.] // Chinese J. Chem. Eng. 2010. Vol. 18, No 4. P. 600–608.

219. Modeling and Simulation of Non-Newtonian Fluid Mold Filling Process with Phase Change / F. Wang [et al.] // Comput. Model. Eng. Sci. 2013. Vol. 95. P. 59–85.

220. Чехонин К.А., Липанов А.М., Булгаков В.К. Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально-вязкой жидкостью в неизотермических условиях // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 57, № 4. С. 577–583.

221. Ren J., Ouyang J., Jiang T. An improved particle method for simulation of the non-isothermal viscoelastic fluid mold filling process // Int. J. Heat Mass Transf. 2015. Vol. 85. P. 543–560.

222. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д. Химическая гидродинамика: Справочное пособие. М. : Квантум, 1996. 336 с.

223. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М. : Наука, 1987. 491 с.
224. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М. : Физматлит, 1960. 660 с.
225. Dussan V. E.B., Davis S.H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 65, No 1. P. 71.
226. Dynamics of Partial Wetting and Dewetting in Well-Defined Systems / J.G. Petrov [et al.] // J. Phys. Chem. B. 2003. Vol. 107, No 7. P. 1634–1645.
227. Dynamics of Wetting Revisited / D. Seveno [et al.] // Langmuir. 2009. Vol. 25, No 22. P. 13034–13044.
228. Della Rocca G.V. A Novel Methodology for Simulating Contact-Line Behavior in Capillary-Driven Flows: Thesis. Pasadena, California Institute of Technology, 2014. 148 p.
229. Tanner L.H. The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces // J. Phys. D. Appl. Phys. 1979. Vol. 12, No 9. P. 1473–1484.
230. Koplik J., Banavar J.R., Willemsen J.F. Molecular dynamics of Poiseuille flow and moving contact lines // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60, No 13. P. 1282–1285.
231. Thompson P.A., Robbins M.O. Simulations of contact-line motion: Slip and the dynamic contact angle // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63, No 7. P. 766–769.
232. Blake T.D., Haynes J.M. Kinetics of displacement // J. Colloid Interface Sci. 1969. Vol. 30, No 3. P. 421–423.
233. Brochard-Wyart F., Gennes P.G. Dynamics of partial wetting // Adv. Colloid Interface Sci. 1992. Vol. 39. P. 1–11.
234. Gentner F., Ogonowski G., De Coninck J. Forced Wetting Dynamics: A Molecular Dynamics Study // Langmuir. 2003. Vol. 19, No 9. P. 3996–4003.
235. Petrov P., Petrov I. A combined molecular-hydrodynamic approach to wetting kinetics // Langmuir. 1992. Vol. 8, No 7. P. 1762–1767.
236. Ruijter M.J., De Coninck J., Oshanin G. Droplet Spreading: Partial Wetting Regime Revisited // Langmuir. 1999. Vol. 15, No 6. P. 2209–2216.
237. Shikhmurzaev Y.D. The moving contact line on a smooth solid surface // Int. J. Multiph. Flow. 1993. Vol. 19, No 4. P. 589–610.
238. Ren W., E W. Boundary conditions for the moving contact line problem // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, No 2. P. 022101.
239. Kistler S.F. Hydrodynamics of wetting // Wettability / New York: Marcel Dekker, 1993. Vol. 6. P. 311–430.
240. Jiang T.S., Soo-Gun O.H., Slattery J.C. Correlation for dynamic contact angle // J. Colloid Interface Sci. 1979. Vol. 69, No 1. P. 74–77.

241. Bracke M., Voeght F., Joos P. The kinetics of wetting: the dynamic contact angle // Prog. Colloid Polym. Sci. Darmstadt : Steinkopff, 1989. Vol. 79. P. 142–149.

242. Seebergh J.E., Berg J.C. Dynamic wetting in the low capillary number regime // Chem. Eng. Sci. 1992. Vol. 47, No 17–18. P. 4455–4464.

243. Afkhami S., Zaleski S., Bussmann M. A mesh-dependent model for applying dynamic contact angles to VOF simulations // J. Comput. Phys. 2009. Vol. 228, No 15. P. 5370–5389.

244. Renardy M., Renardy Y., Li J. Numerical Simulation of Moving Contact Line Problems Using a Volume-of-Fluid Method // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 171, No 1. P. 243–263.

245. Zhang J., Borg M.K., Reese J.M. Multiscale simulation of dynamic wetting // Int. J. Heat Mass Transf. 2017. Vol. 115. P. 886–896.

246. Legendre D., Maglio M. Comparison between numerical models for the simulation of moving contact lines // Comput. Fluids. 2015. Vol. 113. P. 2–13.

247. Afkhami S., Bussmann M. Height functions for applying contact angles to 3D VOF simulations // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2009. Vol. 61, No 8. P. 827–847.

248. Lai M.-C., Tseng Y.-H., Huang H. Numerical Simulation of Moving Contact Lines with Surfactant by Immersed Boundary Method // Commun. Comput. Phys. 2010. Vol. 8, No 4. P. 735–757.

249. Huang H., Liang D., Wetton B. Computation of a Moving Drop/Bubble on a Solid Surface using a Front-Tracking Method // Commun. Math. Sci. 2004. Vol. 2, No 4. P. 535–552.

250. Сумм Б.Д. Основы коллоидной химии: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М. : Академия, 2007. 240 с.

251. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М. ; Л. : Государственное издательство техническо-теоретической литературы, 1950. 428 с.

252. Влияние вязкости жидкости на динамику растекания капли / Архипов В.А. [и др.] // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 1. С. 43–52.

Научное издание

Евгений Иванович БОРЗЕНКО
Геннадий Рафаилович ШРАГЕР

**ТЕЧЕНИЯ
НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Редактор В.Г. Лихачёва
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 10.11.2022 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Печ. л. 13,1. Усл. печ. л. 12,6.
Тираж 500 экз. Заказ № .

Отпечатано на оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–52-98-49
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru

ISBN 978-5-907572-33-1

9 785907 572331 >